



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

Università Politecnica delle Marche

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione

**Analisi dinamica di un motoveicolo elettrico a
trazione integrale in diverse condizioni di fondo
stradale orientata alla sicurezza del mezzo stesso**

Relatore

Chiar.mo Prof. Sauro Longhi

Studente

Riccardo De Amicis

Correlatore

Prof. Andrea Bonci

Anno Accademico 2015–2016

A mia madre Idrena

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Sauro Longhi per avermi dato l'opportunità di raggiungere questo importante traguardo da studente e di conoscere, approfondire e svolgere una tematica per me del tutto nuova.

Un sentito ringraziamento al Prof. Andrea Bonci per il supporto, la supervisione, la disponibilità e l'aiuto fornito durante tutto lo svolgimento del lavoro.

Vorrei infine ringraziare mia madre e i miei fratelli che con il loro incrollabile sostegno morale mi hanno permesso di raggiungere questo straordinario traguardo.

Indice

Ringraziamenti	5
Prefazione	13
Introduzione	15
1 Panoramica storica dei modelli	19
2 Introduzione alla dinamica di un motoveicolo	23
2.1 Concetti di dinamica del motoveicolo	23
2.2 Caratteristiche geometriche di un motoveicolo	24
2.3 I gradi di libertà del sistema	29
2.4 Metodo di studio delle equazioni di moto	30
2.5 Cinematica del veicolo	31
2.5.1 Energia cinetica del motoveicolo	31
2.5.2 Energia potenziale del motoveicolo	36
2.6 Le forze generalizzate	36
2.7 Le forze tra il pneumatico ed il terreno	38
2.7.1 Parametri cinematici delle forze del pneumatico	40
2.8 Equazioni di moto del motoveicolo	41
2.8.1 Soluzione delle equazioni di moto linearizzate	42
3 Estensioni della dinamica e modello a trazione integrale	47
3.1 Approccio metodologico	47
3.2 Estensione delle equazioni di moto	47
3.2.1 Equazione di moto nella direzione di avanzamento	48
3.3 Equazione di moto delle ruote	49
3.3.1 Equazione di moto della ruota posteriore	50

3.3.2	Equazione di moto della ruota anteriore	51
3.4	Forze del pneumatico nella direzione di avanzamento	53
3.4.1	Il modello del pneumatico secondo Burckhardt	54
3.5	Rappresentazione del motoveicolo a trazione integrale	56
3.6	Confronto modale tra il modello esteso ed il modello semplificato di partenza	58
3.7	La piattaforma di simulazione Matlab	60
4	Validazione e test del modello in ambiente di simulazione	63
4.1	Introduzione alle simulazioni	63
4.2	Validazione del modello con trazione posteriore	64
4.3	Influenza dell'angolo di rollio sul modello	70
4.3.1	Effetti dell'angolo di rollio in curva	70
4.4	Validazione del modello in situazione di caduta	74
4.4.1	Situazioni tipiche di caduta	74
4.5	Validazione del modello a doppia trazione	81
5	Conclusioni	93
A	Appendice A	95
A.1	Matrici di rotazione	95
A.2	Caratteristiche di un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso	97
A.2.1	Il tensore d'inerzia	99
A.2.2	Asse principale d'inerzia	100
B	Appendice B	101
B.1	Equazione di Eulero-Lagrange	102
B.1.1	Equazioni di Lagrange	102
B.2	Vincoli e coordinate generalizzate	103
B.2.1	Classificazione dei vincoli	103
B.2.2	Gradi di libertà e coordinate generalizzate	104
B.3	Principio dei lavori virtuali	105
B.4	Procedimento generale	105
	Bibliografia	107

Elenco delle figure

1.1	Il modello di Whipple.	20
1.2	Il range di stabilità del modello di Whipple.	21
2.1	Dinamiche di un veicolo a due ruote.	24
2.2	Geometria del motoveicolo.	25
2.3	I sistemi di riferimento.	27
2.4	Le rotazioni dei sistemi di riferimento.	28
2.5	I gradi di libertà del modello.	29
2.6	Geometria e gradi di libertà del retrotreno del motoveicolo.	33
2.7	Geometria e gradi di libertà dell'avantreno del motoveicolo.	34
2.8	Forze generalizzate.	37
2.9	Forze che nascono nei punti di contatto ruota-terreno.	38
2.10	Angolo di camber del pneumatico anteriore.	40
2.11	Slittamenti laterali della ruota anteriore e posteriore.	41
2.12	Parte reale e frequenze dei modi di vibrare capsize, weave e wobble	45
3.1	Forze agenti nella direzione di avanzamento del veicolo.	48
3.2	Forze e momenti che agiscono sulla ruota posteriore.	50
3.3	Forze e momenti che agiscono sulla ruota anteriore.	52
3.4	Il modello di pneumatico secondo Burckhardt.	54
3.5	Velocità di avanzamento e di rotazione del pneumatico.	55
3.6	Confronto modi di vibrazione tra il modello semplificato e il modello esteso.	58
3.7	La piattaforma di simulazione in Matlab/Simulink.	60
3.8	Implementazione in Simulink per l'analisi grafica e animata in ambiente 3D.	61
3.9	La ricostruzione grafica del modello matematico a dinamiche estese.	61

4.1	Effetto di una coppia applicata sulla velocità di avanzamento e sulle velocità angolari del motoveicolo in condizioni di aderenza.	64
4.2	Effetto di una coppia applicata sulla velocità di avanzamento e sulle velocità angolari del motoveicolo in condizioni di slittamento.	65
4.3	La traiettoria curvilinea percorsa dal motoveicolo a velocità costante.	66
4.4	Rappresentazione della coppia di sterzo, degli angoli di rollio e di sterzo con le relative velocità del motoveicolo durante la curva percorsa.	67
4.5	Rappresentazione delle forze che si generano durante il percorso curvilineo.	67
4.6	Simulazione del moto di serpeggiamento (weave).	68
4.7	Simulazione di scivolamento durante una brusca frenata.	69
4.8	Coppia di sterzo che porta il motoveicolo in piega.	71
4.9	Confronto delle dinamiche di rollio e imbardata per il modello linearizzato e non linearizzato.	72
4.10	Confronto delle traiettorie percorse.	73
4.11	Confronto delle forze laterali.	73
4.12	Fenomeni di cadute lowside e highside.	74
4.13	La curva in fase di frenata durante l'highside.	75
4.14	Highside in frenata: gli andamenti dell'azione di frenata e le velocità angolari delle ruote.	76
4.15	Highside in frenata: la coppia di sterzo, gli angoli di rollio e di imbardata, le forze.	77
4.16	Highside in accelerazione: la coppia applicata e le velocità angolari delle ruote.	78
4.17	Highside in accelerazione: la controsterzata del pilota, gli angoli di rollio, di imbardata e le forze.	79
4.18	La curva in fase di frenata durante il lowside.	80
4.19	Lowside in frenata: coppia applicata, velocità angolari delle ruote, angoli di rollio e d'imbardata.	80
4.20	Ingressi.	82
4.21	Angolo di sterzo al variare della ripartizione di trazione.	82
4.22	Traiettorie percorse al variare delle ripartizioni di trazione.	83
4.23	Coppie di trazione.	84
4.24	Velocità angolari al front.	85
4.25	Velocità angolari al rear.	85
4.26	Angolo di rollio.	86
4.27	Angolo di imbardata.	86
4.28	Angolo di sterzo.	87
4.29	Forza di contatto longitudinale al rear.	87

4.30	Forza di contatto longitudinale al front.	88
4.31	Velocità traslazionale.	88
4.32	Coppie di trazione.	89
4.33	Velocità angolari ruota anteriore.	90
4.34	Velocità angolari ruota posteriore.	90
4.35	Velocità di avanzamento del veicolo.	91
4.36	Angolo di sterzo.	91
A.1	rotazione intorno all'asse z_0	95
A.2	Momento angolare di una particella di un corpo rigido.	98
B.1	Due cammini differenti.	102
B.2	sistema di N particelle	103

Elenco delle tabelle

2.1	Parametri geometrici del modello e relativi valori numerici.	27
-----	--	----

Prefazione

La presente tesi riassume i risultati del percorso seguito nell'attività di dottorato di ricerca il cui ambito ha riguardato lo studio, l'analisi e la modellazione del comportamento dinamico di un motoveicolo a trazione integrale (due ruote motrici). Partendo dall'attuale stato dell'arte riguardante i modelli dei veicoli a due ruote si è sviluppato un nuovo modello matematico per motocicli a trazione integrale idoneo sia a modellare dinamiche complesse, sia ad essere di futuro ausilio alla sintesi di sistemi automatici che pongano particolare attenzione alle tematiche relative alla sicurezza in diverse condizioni di fondo stradale.

L'idea della trazione integrale non è nuova nel mondo dei veicoli a due ruote, alcune implementazioni sono state infatti realizzate su veicoli con motore a combustione, tuttavia queste ultime hanno riscosso uno scarso successo imputabile ad evidenti difficoltà meccaniche nella ripartizione della trazione tra avantreno e retrotreno. D'altra parte, l'avvento dei motori elettrici ha reso più attraente questa soluzione visto il continuo sviluppo tecnologico che ne ha migliorato le prestazioni e aumentato i campi applicativi rendendone interessante ed efficiente l'implementazione.

Un motoveicolo a doppia trazione potrebbe offrire migliori condizioni di sicurezza di guida, in particolare se dotato di sistemi di controllo adeguati che consentono di ripartire dinamicamente la coppia di trazione tra le due ruote. Lo sviluppo di questi sistemi di controllo necessita però di un adeguato modello della dinamica del veicolo che deve comunque garantire un buon compromesso tra complessità computazionale e accuratezza nella descrizione di situazioni di guida complesse o critiche.

L'analisi e la modellazione dei sistemi meccanici, quale il motoveicolo, tipicamente conduce ad un set di equazioni differenziali algebriche (DAE: Differential Algebraic Equation) determinate a partire dalle leggi della fisica e della meccanica. Per risolvere questi sistemi tipicamente si utilizzano due metodi alternativi tra loro: l'approccio analitico che conduce alla scrittura delle equazioni differenziali e l'approccio numerico mediante l'aiuto di strumenti CAD-CAE (Computer-Aided Drafting e Computer-Aided Engineer) o di software multibody quali MSC ADAMS, simMechanics e Modelica. Parte della letteratura degli ultimi decenni

è basata su soluzioni e analisi di prestazioni dedotte usando tali strumenti. Sicuramente il primo approccio richiede più tempo e fatica, ma offre una maggiore flessibilità nella descrizione del modello poiché permette di analizzare nel dettaglio il fenomeno fisico che si vuole analizzare e studiare. Al contrario, con l'approccio numerico si riducono tempi e costi, ma allo stesso tempo si tende a tralasciare quegli aspetti fisici o matematici che risultano essere importanti per la sintesi di sistemi di sicurezza. Per questi motivi, l'attività di ricerca si è principalmente incentrata nello sviluppo di un metodo analitico cercando di sviluppare un modello matematico che rappresentasse il giusto compromesso tra semplicità e accuratezza.

Gli obiettivi dell'attività di ricerca sono stati raggiunti per passi successivi: la prima parte dell'attività si è incentrata sulla ricerca bibliografica di modelli dinamici di veicoli a due ruote. In letteratura esistono modelli analitici esaustivi di veicoli a due ruote in evoluzione libera, pochi altri si occupano di motoveicoli trazionati, mentre, come è già stato accennato, non risultano esistere modelli analitici che descrivono un motoveicolo a trazione integrale. I successivi obiettivi dell'attività di dottorato si sono poi indirizzati allo studio teorico della cinematica e della dinamica di un motoveicolo in genere, allo studio degli effetti della trazione sul modello e, a completamento dell'attività, allo studio di un modello a trazione integrale. Di quest'ultimo si è infine svolta un'analisi dei comportamenti dinamici paragonando i risultati di simulazione con quelli di un motoveicolo ordinario nelle stesse condizioni di moto in modo da poterne valutare le prestazioni in differenti condizioni di esercizio.

Introduzione

Negli ultimi anni sulle strade circolano sempre più motociclette e ciclomotori. Soprattutto in città, offrono una soluzione alla mobilità, alla crescente congestione del traffico, ai problemi di parcheggio e al costo elevato di possedere un'automobile. Dal 2001 al 2015 il numero di questi veicoli sulle strade europee è aumentato del 50% e si è stabilizzato a circa 34,5 milioni di esemplari fra il 2013 e il 2015.

Contemporaneamente a questo incremento l'Organizzazione Mondiale della Sanità informa [16] che ad esempio, nel 2015 più di 5000 motociclisti hanno perso la vita nell'UE. Gli incidenti con motociclette causano il 15% delle vittime di incidenti stradali, mentre quelli con ciclomotori rappresentano circa il 3%. Complessivamente, i veicoli a due ruote sono coinvolti in circa il 18% delle vittime di incidenti stradali, nonostante il fatto che motociclette e ciclomotori rappresentino solo l'11% di tutti i veicoli a motore circolanti su strada.

Per questo motivo l'Unione Europea, si è posta l'ambizioso obiettivo di dimezzare il numero di morti e feriti entro il 2020. L'azione per migliorare la sicurezza di motociclette e ciclomotori comprende vari aspetti, tra i quali:

- **sviluppo tecnologico** - installazione su motociclette e ciclomotori di nuovi strumenti di sicurezza come ad esempio il controllo di trazione, il controllo di frenata o il Controllo della Stabilità;
- **intelligenza distribuita** - miglioramento della sicurezza e dell'esperienza di guida con tecnologie sempre più integrate, connesse e orientate al comfort, fra cui si possono citare i sistemi di trasporto intelligenti;
- **progetti di ricerca** - nuovi prototipi di veicoli con trazioni innovative (2/3 ruote o assenza di ruote), veicoli capaci di reagire a urti o incidenti e veicoli autostabilizzanti.

Storicamente il concetto di sicurezza nasce nel secolo scorso, a partire dagli anni '50 negli Stati Uniti, il paese dove per prima l'auto divenne un mezzo di trasporto popolare e diffuso.

Con l'aumentare del numero delle macchine in circolazione si iniziò a studiare anche come rendere le macchine più sicure. L'attenzione si è rivolta principalmente verso due principali sistemi di sicurezza: i sistemi passivi e i sistemi attivi. La sicurezza passiva comprende tutte quelle soluzioni di natura meccanica che permettono di rendere meno gravi le conseguenze di un incidente. In questa categoria rientrano le cinture di sicurezza, gli airbag, i poggiatesta e le barre antintrusione. La sicurezza attiva comprende invece tutte quelle soluzioni tecniche che permettono di prevenire l'incidente come ad esempio migliorare la tenuta di strada del veicolo, frenare il veicolo anche in condizioni difficili (fondo scivoloso o ghiacciato) o di garantirne la stabilità, quest'ultimi sono aspetti fortemente legati alla dinamica del veicolo. In questa categoria rientrano l'Antilock Braking System (ABS), il Traction Control System (TCS) chiamato anche ASR (Anti-Slip Regulation o Anti-Spin Regulation), cioè antiscivolo o antipattinamento, l'Electronic Stability Control (ESC) noto anche con il nome di Elektronisches Stabilitätsprogramm (ESP) e il Vehicle Dynamic Control (VDC).

Ai giorni d'oggi, le auto di fascia alta, come precedentemente accennato, sono equipaggiate con dispositivi di sicurezza ancora più sofisticati e intelligenti, i cosiddetti ADAS (Advanced Driver Assistance Systems), veri e propri sistemi avanzati di assistenza alla guida. Essi sono costituiti da cluster di sensori che tendono a prevenire il fenomeno dell'incidente agevolando e aiutando il guidatore in caso di distrazione o di pericolo. Tra questi sistemi ci sono l'Adaptive Cruise Control (ACC) che tramite dei sensori radar adatta automaticamente la velocità di un'auto a quella dei veicoli che la precedono, il Forward Collision Warning (FCW) che avverte la presenza di un ostacolo improvviso sulla carreggiata di marcia, l'Automatic Emergency Braking (AEB) dispositivo che autonomamente effettua una frenata d'emergenza per evitare la collisione quando questa risulti inevitabile o il più recente Automatic Parking Assistance (APA) che assistono il guidatore durante il parcheggio.

Tuttavia, se nel settore auto il concetto di sicurezza ha raggiunto ormai un elevato livello di maturità tecnologica, la stessa cosa non è ancora avvenuta nel caso dei motoveicoli. Questo ritardo è dovuto essenzialmente a due ragioni, una di tipo culturale ed una di tipo tecnico: nel primo caso la motocicletta è un veicolo che suscita un totale senso di libertà, quindi, la maggior parte dei motociclisti è convinto che un qualsiasi tipo di controllo o dispositivo di sicurezza possa distorcere o modificare la propria esperienza di guida; nel secondo caso, i motoveicoli presentano maggiori problemi tecnici nell'introduzione di sistemi di sicurezza attiva in quanto rispetto ad un'autovettura, hanno una dinamica molto più complicata dovuta principalmente alla loro instabilità intrinseca.

Attualmente, il campo dello sviluppo dei sistemi di sicurezza dei motoveicoli è ancora in fase emergente e lo sviluppo, in questo ambito, di un motoveicolo a doppia trazione può rappresentare una delle possibili soluzioni per affrontare tali problematiche in modo innovativo. In particolare l'attività della presente tesi sarà incentrata sullo studio delle prestazioni di un motoveicolo a doppia trazione elettrica.

L'esposizione degli argomenti è articolata come segue:

Il primo capitolo offre una panoramica storica dei modelli matematici dei veicoli a due ruote ritenuti più rilevanti che sono stati presentati in letteratura.

Il secondo capitolo introduce i concetti di dinamica di un motoveicolo descrivendo il comportamento dinamico di un primo modello matematico soggetto ad alcune ipotesi semplificative.

Il terzo capitolo estende la dinamica del modello semplificato proponendo il nuovo modello a trazione integrale che nel suo comportamento contempla la dinamica di accelerazione e decelerazione, dinamica in curva in condizioni sia di aderenza stradale che di slittamento.

Il quarto capitolo mostra i risultati dei test di validazione del modello proposto.

Il quinto capitolo riassume le conclusioni sull'attività svolta.

L'appendice A richiama i principali teoremi di cinematica e dinamica di un corpo rigido.

L'appendice B richiama brevemente i principi base della formulazione lagrangiana.

Panoramica storica dei modelli

Prima di iniziare la descrizione analitica del modello matematico proposto per il motociclo oggetto della presente tesi, brevemente descriviamo l'evoluzione storica dei modelli matematici che sono stati presentati in letteratura, nel corso degli anni, per descrivere il comportamento dinamico dei veicoli a due ruote. La bibliografia in questo ambito è molto vasta e tratta argomenti estremamente diversificati, pertanto la presente panoramica non intende dilungarsi in maniera esaustiva sull'argomento, ma solamente fornire un breve riassunto dei principali modelli analizzati e ritenuti storicamente rilevanti.

Da un punto di vista matematico, le biciclette, le motociclette, gli scooter ed in generale i veicoli a due ruote hanno sostanzialmente proprietà dinamiche simili. Lo studio della loro dinamica, inizia nel XIX secolo e si è poi sviluppato in tutto il XX secolo, con modelli matematici che sostanzialmente possono essere divisi in due gruppi: nel primo ci sono i modelli più semplici, senza sterzo, avancorsa e inerzie, sostanzialmente inadeguati a descrivere la complessità della dinamica di un moderno veicolo a due ruote [6, 7, 22].

Del secondo gruppo fanno parte tutti quei modelli chiamati multibody, caratterizzati da un elevato grado di complessità poiché considerano i veicoli a due ruote costituiti da più corpi, sia rigidi che elastici e presentano un numero elevato di gradi di libertà. Per questi tipi di modelli, uno dei primi tentativi di analisi del comportamento dinamico risale a Rankine [17] che nel 1869 pubblicò cinque brevi articoli inerenti lo studio della dinamica di una bicicletta. L'autore presenta delle osservazioni sul comportamento dei velocipedi (nome antesignano del termine bicicletta) rappresentati come un pendolo inverso. Il pilota era considerato una rigida estensione del retrotreno, le ruote non generavano forze e momenti, ma venivano considerate come vincoli che indirizzavano il veicolo nella direzione imposta

dallo sterzo. Infine l'autore introduce i concetti di forze centrifughe e di controsterzo che potevano bilanciare il movimento di caduta laterale legato alle forze gravitazionali e al rollio del veicolo.

Nello stesso periodo si ricordano gli studi di Klein e Sommerfeld [10] e del francese Carvallo [1]. Lo scopo principale di questi studi è stato quello di determinare l'effetto giroscopico della ruota anteriore sulla stabilità della bicicletta. Gli articoli appena citati sono interessanti da un punto di vista storico e scientifico. Per maggiori informazioni sui primi studi apparsi in letteratura riguardanti le biciclette e i tricicli è possibile riferirsi a [18].

Il primo importante contributo teorico sull'instabilità intrinseca delle biciclette apparso in letteratura è del 1899, per merito del matematico Francis John Welsh Whipple [23]. Tale

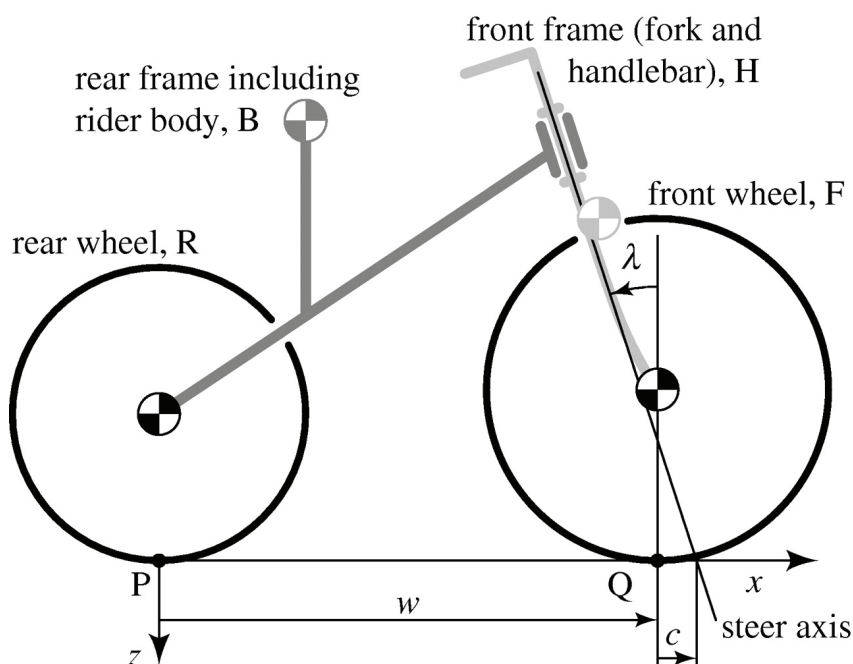


Figura 1.1. Il modello di Whipple.

modello è di notevole importanza poiché rappresenta la base di tutti i modelli successivi nello studio dei veicoli a due ruote. Il modello, rappresentato in figura 1.1, è costituito da due corpi rigidi, uno posteriore ed uno anteriore collegati in corrispondenza dell'asse di sterzo. Le ruote anteriori e posteriori fanno parte rispettivamente dell'avantreno e del retrotreno e sono libere di ruotare rispetto al loro centro. Il pilota è rappresentato come una massa inerte che è rigidamente attaccata al retrotreno. Le ruote, considerate in puro rotolamento, sono modellate con vincoli olonomi nella direzione normale (verticale) e da vincoli anolonomi nelle direzioni longitudinali e laterali. Non vi è alcuna resistenza aerodinamica, nessun corpo flessibile e nessun sistema di sospensione. I gradi di libertà della bicicletta sono rappresentati dal rollio del retrotreno e dall'angolo di sterzo dell'avantreno. Le equazioni di

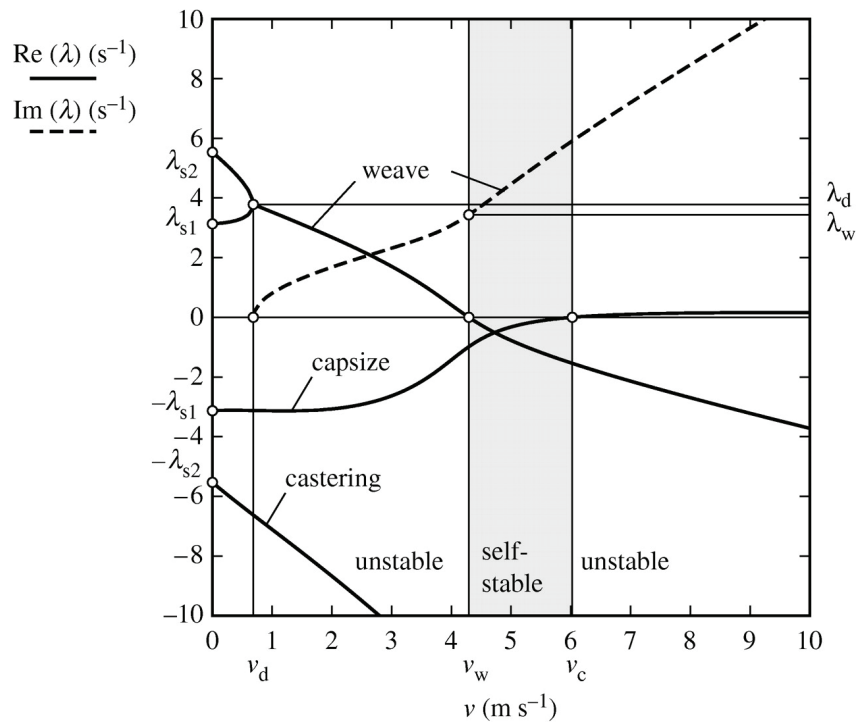


Figura 1.2. Il range di stabilità del modello di Whipple.

moto sono state ottenute utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange, linearizzate attorno alla configurazione di equilibrio verticale. Come mostrato in figura 1.2, mediante il criterio di Routh-Hurwitz, Whipple ha dimostrato come il suo modello di bicicletta sia stabile in evoluzione libera (senza nessun tipo di controllo) nell'intervallo 4 – 6 m/s, mentre al di fuori di questo range il controllo della stabilità del mezzo è necessario venga delegato al pilota, il quale può intervenire agendo sullo sterzo e/o muovendo la posizione del proprio corpo.

Fino all'inizio degli anni '50 non ci sono stati progressi teorici degni di nota riguardo lo studio dinamico di tali veicoli, fino a quando all'interno del mondo scientifico inizia la caratterizzazione del comportamento dei pneumatici. Wilson-Jones in [24] sottolinea l'influenza dell'angolo di rollio sul comportamento dinamico del pneumatico. Successivamente altri interessanti modelli di biciclette sono stati presentati da Roland [12] e da Neimark e Fufaev [14] [13].

All'inizio degli anni '70 lo studio dinamico dei veicoli a due ruote venne esteso alle motociclette diventando argomento sempre più diffuso a livello accademico. A partire da questi anni, inizierà un lungo periodo di studi sulla stabilità dei veicoli a due ruote.

Lavori più recenti sono arrivati a presentare motociclette modellate con parti strutturali flessibili, introducendo ad esempio la flessibilità torsionale della forcella [21] [20] o gli ammortizzatori [19]. Nel 1983 avviene un salto di qualità, quando C. Koenen [11] presentò un modello molto più completo composto da 8 corpi rigidi in grado di studiare il

comportamento del veicolo anche in curva. Questo elaborato ha permesso di comprendere che per una motocicletta in curva, le dinamiche sono fortemente legate tra loro e il loro effetto aumenta all'aumentare dell'angolo di rollio. Le equazioni determinate da questo modello sono estremamente complicate e soggette ad errori anche da parte dello stesso autore. Successivamente, l'avvento dei computer e dei software multibody [5] ha permesso di superare questa difficoltà rendendo possibile l'analisi di modelli con un numero sempre più elevato di parametri fisici e/o meccanici, la cui determinazione oggi è diventato uno dei problemi principali rispetto alla modellazione. Per i modelli analizzati con software multibody è possibile fare riferimento a [3].

Alla luce di quanto esposto si evince che la dinamica degli attuali motoveicoli è analizzata principalmente con l'ausilio di software multibody, che le tematiche di controllo non sono sufficientemente approfondite rispetto alle loro potenzialità di sviluppo e soprattutto non risulta essere adeguatamente approfondita l'analisi di un motoveicolo a trazione integrale. L'arduo obiettivo della presente attività di dottorato consisterà pertanto nel tentare di colmare questa carenza proponendo un nuovo modello matematico che sia in grado di simulare il comportamento di un motoveicolo a trazione integrale.

Introduzione alla dinamica di un motoveicolo

2.1 Concetti di dinamica del motoveicolo

In questo capitolo si introducono brevemente alcuni concetti che riguardano il comportamento dinamico di un motoveicolo. Da un punto di vista generale, la dinamica di un motoveicolo si divide in due categorie:

- dinamiche simmetriche: comprendono la dinamica longitudinale e la dinamica verticale del veicolo;
- dinamiche anti-simmetriche: comprendono la dinamica laterale del veicolo.

La prima dinamica descrive i moti e i movimenti del veicolo quando si trova in posizione verticale, cioè quando il proprio piano di simmetria è perpendicolare alla superficie stradale. La dinamica laterale invece descrive i movimenti e i comportamenti del veicolo quando non è più in posizione verticale.

Lo studio delle diverse dinamiche si effettua tramite la cosiddetta analisi modale, in particolare analizzando i modi di vibrazione che possono nascere a partire da una configurazione di equilibrio. In letteratura [2] i modi della motocicletta sono stati classificati in modi in-plane (contenuti nel piano di simmetria) e in out-of-plane (non simmetrici). I primi comprendono lo spostamento verticale dovuto alle sospensioni del motoveicolo, il bounce (salti verticali), il beccheggio (pitch) e i salti delle ruote (rear e front wheel hops). I modi out-of-plane nascono dalle oscillazioni che interessano lo spostamento laterale, l'imbardata

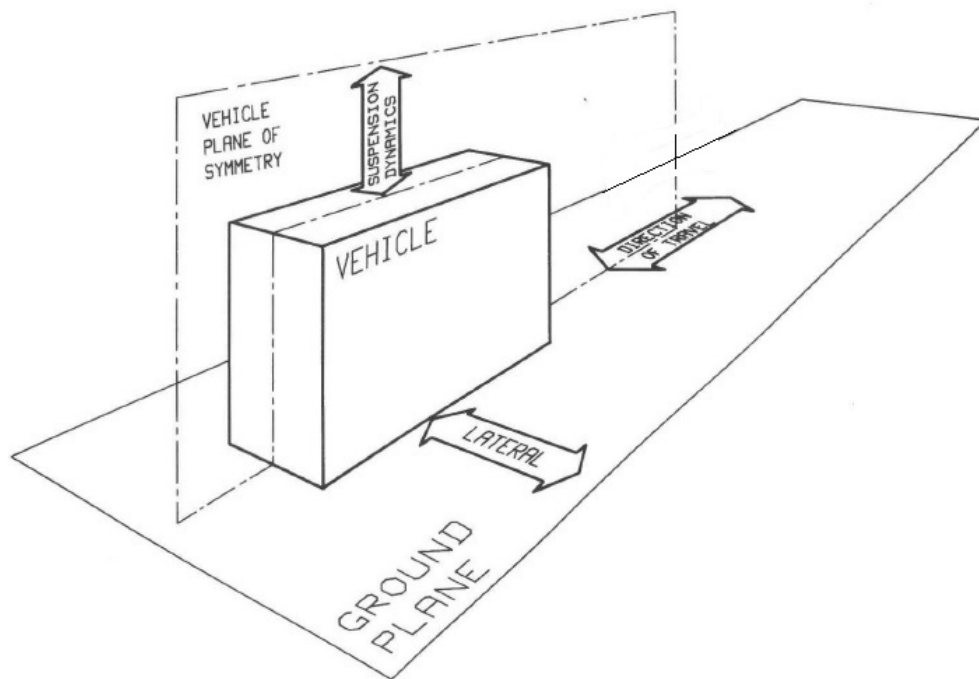


Figura 2.1. Dinamiche di un veicolo a due ruote.

(yaw), il rollio (roll) e la rotazione dello sterzo (steer), ossia i gradi di libertà non simmetrici della motocicletta. Questi modi sono particolarmente importanti perché influenzano la stabilità e possono portare alla caduta del veicolo.

L'analisi delle dinamiche in-plane sono utili a migliorare il comfort di guida e l'aderenza, mentre le dinamiche out-of-plane influenzano la maneggevolezza di guida e la stabilità dell'equilibrio. La maneggevolezza descrive l'abilità della motocicletta nell'eseguire manovre complicate, e quanto difficilmente il pilota le compie. La stabilità, al contrario, consiste nella capacità della motocicletta di mantenere l'equilibrio in risposta ai disturbi esterni, come nel caso di una superficie stradale dissestata o a raffiche di vento, ecc.

Inoltre, va sottolineato un aspetto delle dinamiche del veicolo relativo alla loro interazione, ovvero: in un motoveicolo che si muove in posizione verticale e si sposta per piccole oscillazioni laterali (rollio), le dinamiche longitudinali e laterali sono disaccoppiate, cioè le equazioni di moto, che descrivono il movimento del motoveicolo lungo la direzione longitudinale e laterale sono tra loro ortogonali, e quando le due dinamiche sono disaccoppiate, esse possono essere studiate in maniera separata.

2.2 Caratteristiche geometriche di un motoveicolo

Nello studio del comportamento dinamico di un qualunque fenomeno o sistema reale,

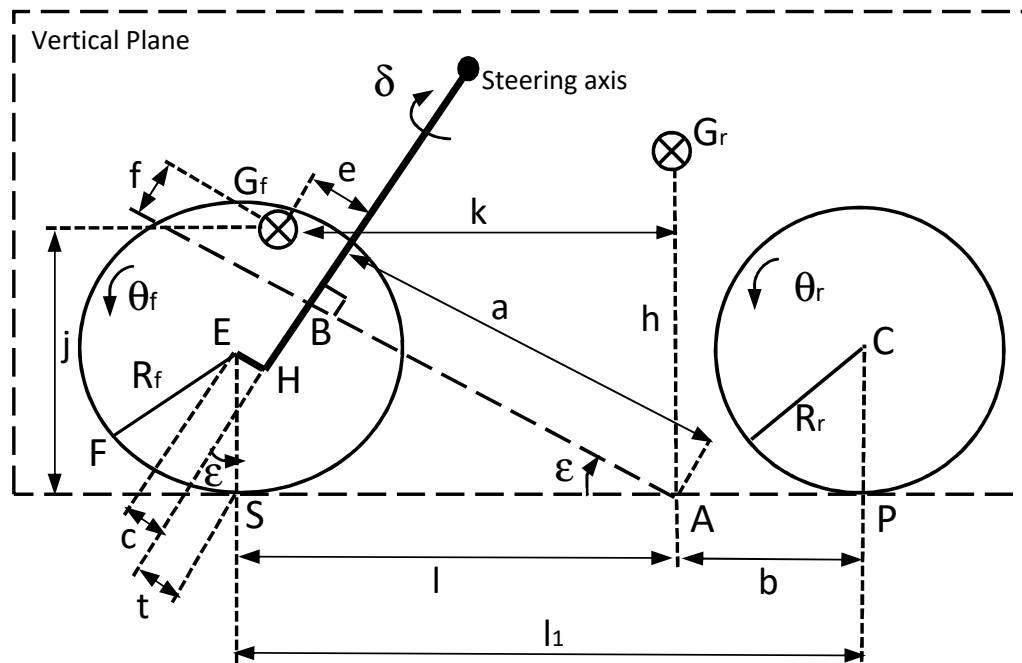


Figura 2.2. Geometria del motoveicolo.

è rilevante inizialmente costruire un modello matematico in grado di descrivere i comportamenti in modo più realistico possibile. Per definire il modello, pertanto, è necessario in primo luogo stabilire i parametri geometrici e le forze che agiscono sul sistema che si vuole analizzare e che, come vedremo, influenzano la cinematica e la dinamica del veicolo.

Per lo studio cinematico del motociclo è necessario introdurre delle ipotesi semplificative e fare riferimento ai principali parametri geometrici che ne descriveranno il modello. In particolare nel presente studio, in prima approssimazione si farà riferimento ad un motociclo rigido, cioè senza sospensioni e con le ruote inizialmente dotate di pneumatici indeformabili. Per tale modello saranno nel seguito valide le seguenti ipotesi iniziali, alcune delle quali verranno rimosse nel prosieguo del lavoro:

- il veicolo è costituito da due corpi rigidi che sono uniti tra loro mediante un meccanismo di sterzo convenzionale;
- il corpo rigido anteriore, o avantreno, è costituito da: ruota anteriore, forcella e manubrio;
- il corpo rigido posteriore, o retrotreno, è costituito da: telaio, motore, serbatoio del carburante, sella, forcellone posteriore, ruota posteriore e pilota rigidamente vincolato al corpo stesso;

- i due corpi rigidi hanno un piano di simmetria longitudinale e l'asse che attraversa il centro di massa del corpo rigido anteriore parallelo all'asse di sterzo è un asse principale di inerzia;
- le ruote sono dischi rigidi ognuno dei quali ha un punto di contatto con la strada. Esse rotolano senza strisciare longitudinalmente su una superficie stradale piana;
- l'asse di rotazione del motore è trasversale (ortogonale alla direzione di avanzamento longitudinale);
- la motocicletta si muove in avanti a velocità costante, non è dotata di sospensioni e quindi il movimento verticale e di rotazione dovuta al beccheggio e gli effetti aerodinamici sono trascurati.

In figura 2.2 sono indicate le principali grandezze geometriche che caratterizzano il veicolo considerato. Esso è costituito da due corpi rigidi e da due ruote, anteriore e posteriore. Le posizioni posteriore ed anteriore saranno individuate rispettivamente dal pedice r che indica il "rear" ed f il "front". Il corpo rigido posteriore è caratterizzato dal centro di massa G_r , da una massa M_r e da un momento d'inerzia I_r . Il corpo rigido anteriore è caratterizzato dal centro di massa G_f , da una massa M_f e da un momento d'inerzia I_f .

Inoltre il motoveicolo sarà caratterizzato da un passo l_1 , da un angolo d'inclinazione di sterzo ε e da un avancorsa t . Il passo l_1 è la distanza tra i punti di contatto dei pneumatici P ed S con il piano stradale; l'angolo d'inclinazione dello sterzo ε è l'angolo compreso tra l'asse verticale e l'asse dello sterzo mentre l'avancorsa t è la distanza tra il punto di contatto della ruota anteriore S ed il punto d'intersezione dell'asse dello sterzo con il piano stradale. Queste grandezze geometriche influiscono sulla maneggevolezza della motocicletta, in particolare, la lunghezza del passo può variare a seconda del tipo di veicolo, per esempio 1200 mm nel caso di piccoli scooter, 1350 mm per le motociclette di media cilindrata (250 cc) fino a 1600 mm ed oltre, per le motociclette da turismo di grossa cilindrata. L'avancorsa e l'angolo d'inclinazione dello sterzo sono particolarmente importanti poiché influenzano maggiormente le proprietà di manovrabilità e stabilità direzionale dei motocicli. In tabella 2.1 sono riportati i valori numerici dei parametri geometrici mostrati in figura 2.2 e assunti nel seguito della trattazione come valori di riferimento per le successive simulazioni. Essi sono reperibili dalla letteratura tecnica e sono riferiti ad un motociclo modello Triumph 650. Tali parametri sono misurati considerando il veicolo in posizione verticale e con angolo di sterzata nullo.

La figura 2.3 riporta il veicolo in posizione verticale indicando i sistemi di riferimento utili a descriverne posizione e orientazione:

- $\Sigma_0 = \langle O, X_0, Y_0, Z_0 \rangle$ è il sistema di riferimento inerziale;

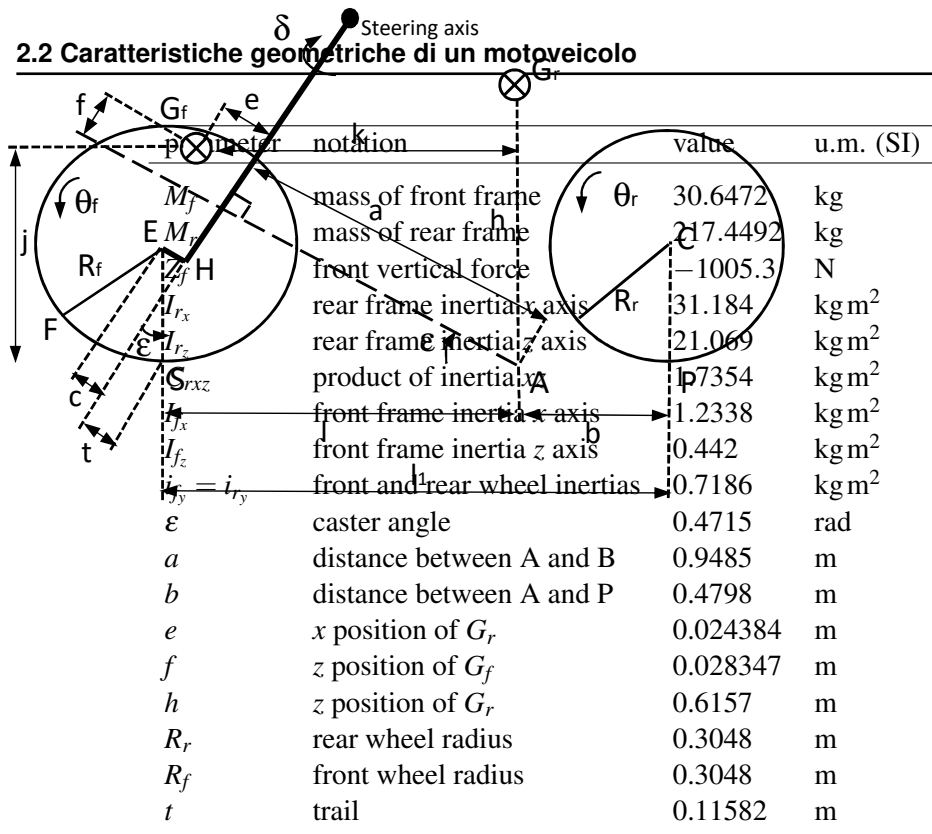


Tabella 2.1. Parametri geometrici del modello e relativi valori numerici.

- $\Sigma_1 = \langle O, X_1, Y_1, Z_1 \rangle$ è il sistema di riferimento che individua l'imbardata ψ del veicolo;
- $\Sigma_2 = \langle O, X_2, Y_2, Z_2 \rangle$ è il sistema di riferimento che individua il rollio ϕ del veicolo;
- $\Sigma_3 = \langle O, X_3, Y_3, Z_3 \rangle$ è il sistema di riferimento che individua il beccheggio ϵ del

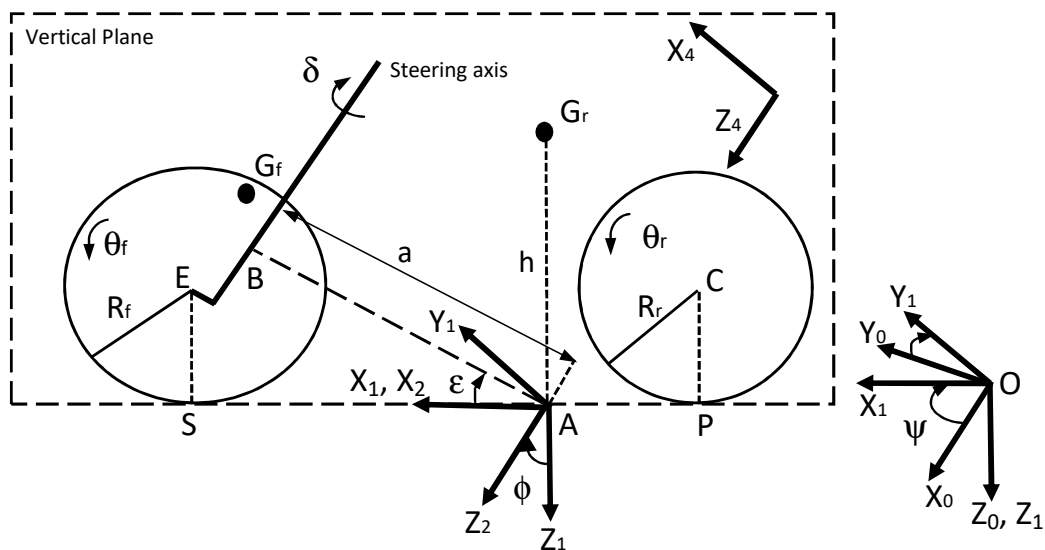


Figura 2.3. I sistemi di riferimento.

veicolo;

- $\Sigma_4 = \langle O, X_4, Y_4, Z_4 \rangle$ è il sistema di riferimento che individua l'angolo di sterzo δ del veicolo.

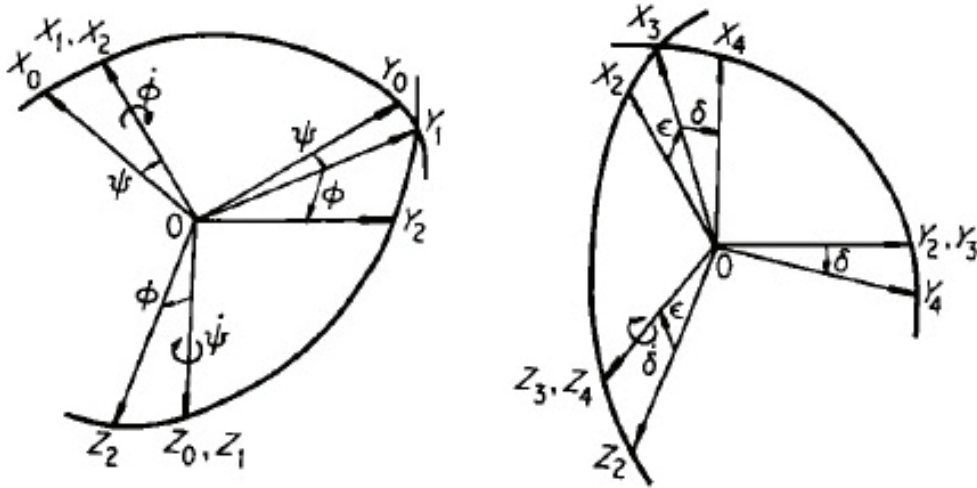


Figura 2.4. Le rotazioni dei sistemi di riferimento.

Una volta definiti i sistemi di riferimento si possono introdurre le rotazioni di base che permetteranno di orientare i sistemi di riferimento tra loro. Per orientare un sistema di riferimento rispetto all'altro si utilizzano le classiche matrici di rotazione riassunte di seguito:

$$\begin{aligned}
 R_\psi &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & R_\phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 R_\epsilon &= \begin{bmatrix} \cos \epsilon & 0 & \sin \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{bmatrix} & R_\delta &= \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove in generale con R_α si è indicata la matrice di rotazione R rispetto all'angolo α . Maggiori dettagli relativi alla costruzione delle matrici di rotazione sono riportati in appendice A.1. Riferendosi ai sistemi di riferimento appena introdotti, la figura 2.4 riassume le relazioni di orientazione tra tali sistemi e mostra le necessarie rotazioni per passare da un sistema all'altro.

2.3 I gradi di libertà del sistema

Nel paragrafo precedente sono state introdotte la geometria e i sistemi di riferimento per individuare la posizione e l'orientazione del veicolo. In questo paragrafo si passerà a

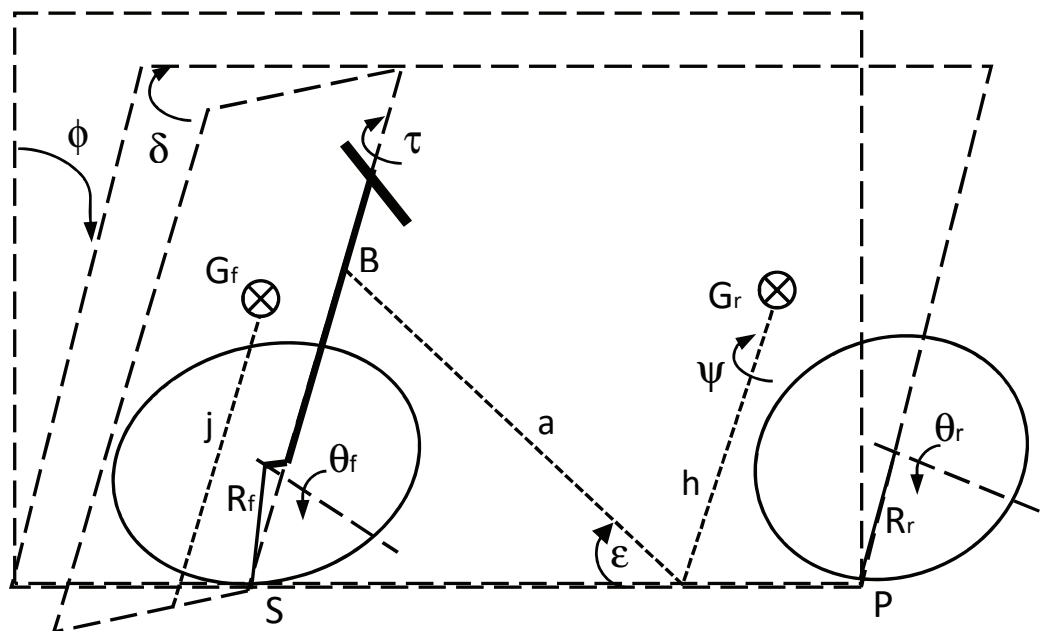


Figura 2.5. I gradi di libertà del modello.

definire i gradi di libertà del motoveicolo. I gradi di libertà del motociclo rappresentano il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente la sua posizione e l'orientamento nello spazio.

Il modello studiato nel presente lavoro è costituito da due corpi rigidi, ciascuno dei quali nello spazio tridimensionale ha 6 gradi di libertà. Tuttavia i due corpi rigidi sono vincolati tra loro mediante un meccanismo di sterzo ed inoltre i punti di contatto delle due ruote P ed S sono vincolati a giacere sul piano orizzontale $z = 0$. Dalla teoria (vedere appendice B.2.1) sappiamo che la presenza di questi vincoli riduce il numero di gradi di libertà l necessari ad individuare la configurazione del veicolo. In particolare, il meccanismo di sterzo elimina 5 gradi di libertà, il vincolo di contatto ruota-terreno sottrae 1 grado di libertà per ciascuna ruota. Infine, come già anticipato nelle ipotesi del modello (paragrafo 2.2), considerando la velocità di marcia del motociclo costante, il numero di gradi di libertà per descrivere tale sistema risulta essere:

$$l = 12 - 5 - 2 - 1 = 4. \quad (2.2)$$

Come mostrato in figura 2.5 per caratterizzare la motocicletta nello spazio verranno scelti i seguenti quattro gradi di libertà:

- lo spostamento laterale y_1 del veicolo;
- l'angolo di imbardata ψ del veicolo;
- l'angolo di rollio ϕ del veicolo;
- l'angolo di sterzo δ del veicolo;

2.4 Metodo di studio delle equazioni di moto

Per valutare la dinamica della motocicletta è necessario svolgere preliminarmente il suo studio cinematico. Dopo aver definito la geometria e i gradi di libertà del modello, occorre ricavare tutte le grandezze cinematiche le quali, successivamente, consentiranno di determinare le equazioni di moto derivate dal metodo di Eulero-Lagrange in base alla seguente procedura:

1. utilizzando la meccanica lagrangiana (vedi appendice B), le equazioni di moto del sistema si determinano quali soluzioni dell'espressione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q_q, \quad (2.3)$$

dove:

- T è l'energia cinetica del sistema;
 - V è l'energia potenziale del sistema;
 - q è il vettore delle coordinate generalizzate del sistema che nel caso in oggetto si sceglieranno coincidenti con i gradi di libertà del sistema ovvero $q = [y_1 \ \psi \ \phi \ \delta]$;
 - Q_q è il vettore delle forze generalizzate esterne che agiscono sul sistema.
2. si calcola l'energia cinetica totale T del sistema;
 3. si calcola l'energia potenziale V del sistema;
 4. si calcolano le forze generalizzate Q_q agenti sul sistema;
 5. sostituendo T , V e Q_q in (2.3) si ottiene un sistema di equazioni non lineari;
 6. si risolve il sistema di equazioni non lineari.

Nel caso si ritenga utile, sotto opportune ipotesi, passare ad una soluzione semplificata del sistema, si possono eseguire i seguenti ulteriori passi:

7. si linearizzano le equazioni non lineari;

8. si risolve il sistema di equazioni linearizzate;

Per calcolare le equazioni di moto della motocicletta, derivate dalla (2.3), nei paragrafi successivi si andranno a sviluppare le procedure per risolvere i punti 2,3,4 in modo da poter affrontare i punti 5 e 6 ed eventualmente i punti 7 e 8.

2.5 Cinematica del veicolo

Una volta definiti i gradi di libertà del sistema è possibile passare allo studio della cinematica del veicolo. Lo studio cinematico della motocicletta risulta essenziale per definire le velocità di traslazione e di rotazione dei corpi rigidi che la compongono; il calcolo di tali velocità permetterà di ricavare l'energia cinetica T ed il potenziale V del sistema. Note queste energie si potranno definire le equazioni di Eulero-Lagrange (vedere appendice B.1) del veicolo la cui risoluzione permetterà di ricavare le equazioni dinamiche del sistema.

Nota la geometria della motocicletta, si possono ricavare le velocità di traslazione v e le velocità angolari ω dei due corpi rigidi che descrivono il sistema. Il calcolo delle velocità dei corpi rigidi si riconduce chiaramente al calcolo delle velocità dei centri di massa di ciascun corpo rigido componente la motocicletta. A tale proposito definiremo v_r e v_f , ω_r e ω_f rispettivamente le velocità traslazionali e angolari del corpo rigido posteriore (rear) e anteriore (front). Nel prossimo paragrafo saranno brevemente riassunte le espressioni dell'energia cinetica e del potenziale del motoveicolo.

2.5.1 Energia cinetica del motoveicolo

Particolarizzando il concetto di energia cinetica al motoveicolo composto da 2 corpi rigidi si dovranno calcolare 4 velocità roto-traslazionali: v_r , v_f , ω_r e ω_f ; definiti inoltre i tensori d'inerzia del retrotreno e dell'avantreno I_r e I_f , queste 6 grandezze saranno sufficienti per calcolare l'energia cinetica T e l'energia potenziale V dei due corpi rigidi. L'espressione dell'energia cinetica T del sistema sarà data dalla seguente espressione:

$$T = T_r + T_f + T_\omega \quad (2.4)$$

in cui:

- T_r è l'energia cinetica del retrotreno;
- T_f è l'energia cinetica dell'avantreno;
- T_ω è l'energia cinetica rotazionale di tutte le componenti rotanti del sistema.

Ricordando che l'energia cinetica di un corpo rigido è data dalla somma dell'energia cinetica di traslazione e dall'energia cinetica di rotazione del corpo, è possibile definire:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2.5)$$

in cui:

- $\frac{1}{2}mv^2$ è l'energia cinetica di traslazione;
- $\frac{1}{2}I\omega^2$ è l'energia cinetica di rotazione;
- m è la massa del corpo rigido;
- v è la velocità di traslazione del corpo rigido;
- I è il momento d'inerzia del corpo rigido;
- ω è la velocità di istantanea rotazione del corpo rigido.

Particolarizzando l'equazione (2.5) per i corpi rigidi posteriore ed anteriore è possibile quindi determinare le energie cinetiche dell'intero sistema:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2}M_r v_r^2 + \frac{1}{2}I_r \omega_r^2 \\ T_f &= \frac{1}{2}M_f v_f^2 + \frac{1}{2}I_f \omega_f^2 \\ T_\omega &= \frac{1}{2}i_r \omega_{rw}^2 + \frac{1}{2}i_f \omega_{fw}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove:

- M_r è la massa del retrotreno;
- v_r è la velocità di traslazione del retrotreno;
- I_r è il momento d'inerzia del retrotreno;
- ω_r è la velocità angolare del retrotreno.
- M_f è la massa dell'avantreno;
- v_f è la velocità di traslazione dell'avantreno;
- I_f è il momento d'inerzia dell'avantreno;
- ω_f è la velocità angolare dell'avantreno;
- i_r è il momento d'inerzia polare della ruota posteriore;

- i_f è il momento d'inerzia polare della ruota anteriore;
- ω_{rw} è la velocità angolare della ruota posteriore;
- ω_{fw} è la velocità angolare della ruota anteriore.

Nei successivi paragrafi saranno riportate le espressioni delle velocità indicate in (2.6) che sono banalmente riconducibili al calcolo delle velocità dei sistemi di riferimento introdotti e descritti nel paragrafo 2.2. Per brevità di trattazione, essendo riconducibili ad un semplice esercizio di calcolo algebrico, i passaggi intermedi verranno omessi.

Velocità traslazionale del corpo rigido posteriore

In questo paragrafo verrà descritta la velocità di traslazione del retrotreno v_r , coincidente con quella del suo centro di massa. Riferendosi alle figure 2.3 e 2.6 esso risulta caratterizzato

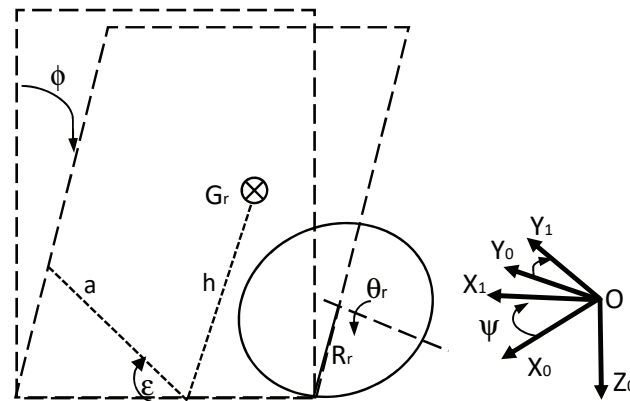


Figura 2.6. Geometria e gradi di libertà del retrotreno del motoveicolo.

sia dai movimenti di rollio ϕ che d'imbardata ψ . La velocità di traslazione del retrotreno è pertanto calcolabile tenendo in considerazione i 3 gradi di libertà del retrotreno ovvero la velocità di traslazione e i due angoli di rotazione:

$$v_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - h \sin \phi \dot{\psi} \\ \dot{y}_1 + h \cos \phi \dot{\phi} \\ h \sin \phi \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

in cui h rappresenta la quota di G_r rispetto al terreno.

Velocità traslazionale del corpo rigido anteriore

In questo paragrafo verrà riportata la velocità di traslazione dell'avantreno v_f . Riferendosi

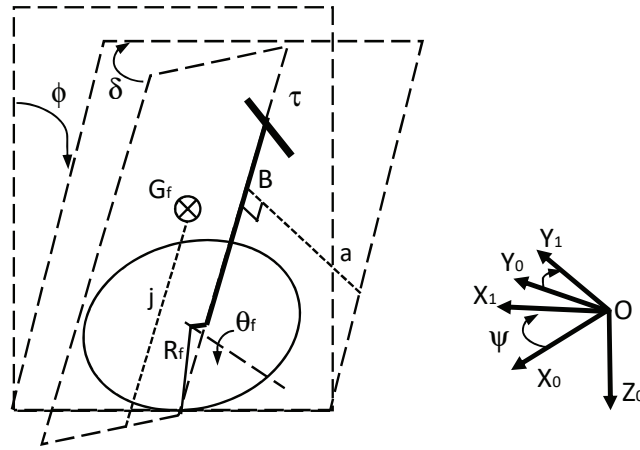


Figura 2.7. Geometria e gradi di libertà dell'avantreno del motoveicolo.

alla figura 2.7 tale velocità verrà calcolata come velocità del sistema Σ_4 solidale con l'avantreno. Derivando rispetto al tempo la posizione del sistema Σ_4 , il calcolo dell'equazione cinematica permette di scrivere la seguente espressione per la velocità di traslazione dell'avantreno:

$$v_f = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - e \cos \varepsilon \sin \delta \dot{\delta} + (a \sin \varepsilon \sin \phi + e \sin \delta \cos \phi \\ + e \sin \varepsilon \cos \delta \sin \phi + f \cos \varepsilon \sin \phi) \dot{\psi} \\ \dot{y}_1 + a \sin \varepsilon \cos \phi \dot{\phi} - e \sin \delta \sin \phi \dot{\phi} + e \cos \delta \cos \phi \dot{\delta} + e \sin \varepsilon \cos \delta \cos \phi \dot{\phi} \\ - e \sin \varepsilon \sin \delta \sin \phi \dot{\delta} - f \cos \varepsilon \cos \phi \dot{\phi} \\ + (a \cos \varepsilon + e \cos \delta \cos \varepsilon - f \sin \varepsilon) \dot{\psi} \\ a \sin \varepsilon \sin \phi \dot{\phi} + e \sin \delta \cos \phi \dot{\phi} + e \cos \delta \sin \phi \dot{\delta} + e \sin \varepsilon \cos \delta \sin \phi \dot{\phi} \\ + e \sin \varepsilon \sin \delta \cos \phi \dot{\delta} + f \sin \phi \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Velocità angolari del corpo rigido posteriore ed anteriore

Nel presente paragrafo si introdurrà la velocità angolare ω_r del corpo rigido posteriore e la velocità angolare ω_f del corpo rigido anteriore. Riferendosi alle figure 2.6 e 2.7 esse coincidono rispettivamente con la velocità di rotazione del sistema Σ_2 e con la velocità di rotazione del sistema Σ_4 . La velocità angolare posteriore è quindi data dalla seguente relazione:

$$\omega_r = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \sin \phi \dot{\psi} \\ \cos \phi \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

La velocità di rotazione anteriore è invece:

$$\omega_f = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \delta \dot{\phi} + (\sin \delta \sin \phi - \sin \varepsilon \cos \delta \cos \phi) \dot{\psi} \\ -\cos \varepsilon \sin \delta \dot{\phi} + (\cos \delta \sin \phi + \sin \varepsilon \sin \delta \cos \phi) \dot{\psi} \\ \dot{\delta} + \sin \varepsilon \dot{\phi} + \cos \varepsilon \cos \phi \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Tensori d'inerzia dei corpi rigidi anteriore e posteriore

Di seguito saranno introdotti i momenti d'inerzia del retrotreno e dell'avantreno I_r e I_f (vedere appendice A.2.1). Per ipotesi, la retta parallela all'asse di sterzo e passante per il c.d.m G_f è un asse principale d'inerzia. Per tali ragioni il tensore d'inerzia dell'avantreno sarà costituito da una matrice simmetrica diagonale del tipo:

$$I_f = \begin{bmatrix} I_{f_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{f_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{f_z} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Per il retrotreno, essendo gli assi X_1 e Z_1 non paralleli agli assi principali del corpo rigido posteriore, il tensore d'inerzia corrispondente sarà espresso dalla matrice:

$$I_r = \begin{bmatrix} I_{r_x} & 0 & -C_{rxz} \\ 0 & I_{r_y} & 0 \\ -C_{rxz} & 0 & I_{r_z} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

in cui il termine C_{rxz} rappresenta il relativo momento centrifugo.

Velocità angolare delle ruote posteriore e anteriore

Nel presente paragrafo saranno determinate le velocità angolari della ruota posteriore ed anteriore. Esse saranno rispettivamente indicate con ω_{rw} e ω_{fw} . Le componenti della velocità angolare della ruota posteriore orientata come il sistema Σ_2 sono date dalla seguente relazione:

$$\omega_{rw} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \sin \phi \dot{\psi} + \dot{\theta}_r \\ \cos \phi \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Allo stesso modo, per la ruota anteriore, le componenti della velocità angolare della ruota orientata come il sistema Σ_4 sono date dalla seguente relazione:

$$\omega_{fw} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \delta \dot{\phi} + (\sin \delta \sin \phi - \sin \varepsilon \cos \delta \cos \phi) \dot{\psi} \\ -\cos \varepsilon \sin \delta \dot{\phi} + (\cos \delta \sin \phi + \sin \varepsilon \sin \delta \cos \phi) \dot{\psi} + \dot{\theta}_f \\ \dot{\delta} + \sin \varepsilon \dot{\phi} + \cos \varepsilon \cos \phi \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Energia cinetica del sistema

Sostituendo in (2.4) tutte le velocità calcolate nei paragrafi precedenti è possibile determinare l'energia cinetica complessiva del sistema motoveicolo:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}M_r[(\dot{x}_1 - h \sin \phi \dot{\psi})^2 + (\dot{y}_1 + h \cos \phi \dot{\phi})^2 + (h \sin \phi \dot{\phi})^2] + \frac{1}{2}I_{rx}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{ry}(\sin \phi \dot{\psi})^2 + \\
& I_{rz}(\cos \phi \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}M_f\{[\dot{x}_1 - e \cos \varepsilon \sin \delta \dot{\delta} - (a \sin \varepsilon \sin \phi + e \sin \delta \cos \phi + e \sin \varepsilon \cos \delta \sin \phi + \\
& f \cos \varepsilon \sin \phi)\dot{\psi}]^2 + [\dot{y}_1 + a \sin \varepsilon \cos \phi \dot{\phi} - e \sin \delta \sin \phi \dot{\phi} + e \cos \delta \cos \phi \dot{\delta} + \\
& e \sin \varepsilon \cos \delta \cos \phi \dot{\phi} - e \sin \varepsilon \sin \delta \sin \phi \dot{\delta} + f \cos \varepsilon \cos \phi \dot{\phi} + (a \cos \varepsilon + e \cos \delta \cos \varepsilon - \\
& f \sin \varepsilon)\dot{\psi}]^2 + [a \sin \varepsilon \sin \phi \dot{\phi} + e \sin \delta \cos \phi \dot{\phi} + e \cos \delta \sin \phi \dot{\delta} + e \sin \varepsilon \cos \delta \sin \phi \dot{\phi} + \\
& e \sin \varepsilon \sin \delta \cos \phi \dot{\delta} + f \cos \varepsilon \sin \phi \dot{\phi}]^2\} + \frac{1}{2}I_{fx}[\cos \varepsilon \cos \delta + (\sin \delta \sin \phi - \\
& \sin \varepsilon \cos \delta \cos \phi)\dot{\psi}]^2 + \frac{1}{2}I_{fy}[-\cos \varepsilon \sin \delta + (\cos \delta \sin \phi + \sin \varepsilon \sin \delta \cos \phi)\dot{\psi}]^2 + \frac{1}{2}I_{fz}[\dot{\delta} + \\
& \sin \varepsilon \dot{\phi}] + i_{ry}(\sin \phi \dot{\psi} \dot{\theta}_r + \frac{1}{2}\dot{\theta}_r^2) + i_{fy}\{-\cos \varepsilon \sin \delta \dot{\phi} + (\cos \delta \sin \phi + \sin \varepsilon \sin \delta \cos \phi)\dot{\theta}_f + \\
& \frac{1}{2}\dot{\theta}_f^2\}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

2.5.2 Energia potenziale del motoveicolo

L'energia potenziale del sistema è dato dalla somma delle energie potenziali dei due corpi rigidi anteriore e posteriore. Indicando con V l'energia potenziale totale e con V_r e V_f rispettivamente quella dei corpi rigidi posteriore e anteriore si può scrivere:

$$V = V_r + V_f = M_r g z_r + M_f g z_f, \tag{2.16}$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale e z_r e z_f sono le quote di G_r e G_f rispetto al terreno. Esplicitando z_r e z_f in funzione delle orientazioni del veicolo rappresentate dalle figure 2.6 e 2.7 si può riscrivere il potenziale come segue:

$$V = M_r g h \cos \phi + M_f g (a \cos \phi - e \sin \delta + e \cos \delta \cos \phi + f \cos \varepsilon). \tag{2.17}$$

Come si può notare l'equazione (2.17) mostra come l'energia potenziale del veicolo è direttamente legata agli angoli di rollio ϕ e di sterzo δ , ovvero alle variabili che hanno effetto sull'inclinazione del veicolo.

2.6 Le forze generalizzate

Continuando la procedura per il calcolo delle equazioni di moto, per poter risolvere completamente il sistema 2.3 occorre calcolare le forze generalizzate Q_{y_1} , Q_ψ , Q_ϕ , Q_δ , esse rappresentano i bilanci delle forze ed i momenti agenti sul sistema motocicletta che nascono principalmente dall'interazione del pneumatico con la strada o dall'assetto dello sterzo. Si parla di forze generalizzate perché ad ogni grado di libertà del modello corrisponde

un'adeguata forza generalizzata. Il grado di libertà y_1 rappresenta uno spostamento, mentre

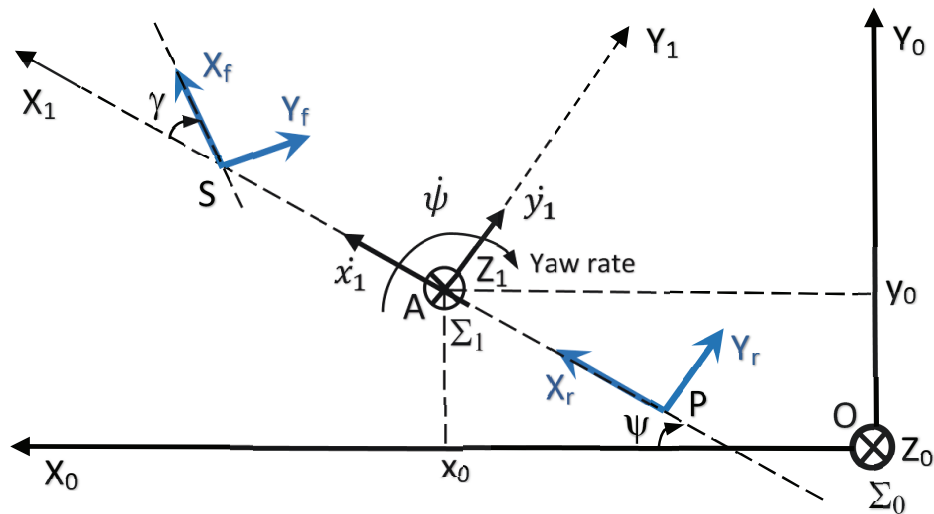


Figura 2.8. Forze generalizzate.

gli altri gradi di libertà ψ , ϕ e δ sono degli angoli, quindi la forza generalizzata Q_{y_1} relativa a y_1 , dimensionalmente rappresenta una forza, mentre le forze generalizzate Q_ψ , Q_ϕ , Q_δ corrispondenti agli angoli ψ , ϕ e δ rappresentano dei momenti.

Allo scopo di rendere più semplice la trattazione del bilancio delle forze generalizzate si farà riferimento alle figure 2.8 e 2.9 che indicano le forze effettive agenti sui pneumatici. In particolare definendo Y_i la forza laterale agente sul pneumatico i -esimo e Z_i le rispettive forze verticali. Il pedice $i = r, f$ indica il rear o il front, mentre γ rappresenta l'angolo di sterzata effettivo e si può facilmente verificare che sotto le ipotesi di piccoli angoli di sterzata, il bilancio delle forze generalizzate laterali risulta essere:

$$Q_{y_1} = Y_r + Y_f. \quad (2.18)$$

Sempre riferendosi alla figura 2.8, risulta immediato determinare il momento d'imbardata Q_ψ generato dalle stesse forze agenti sui pneumatici:

$$Q_\psi = lY_f - Y_r b. \quad (2.19)$$

In modo analogo, considerando l'effetto delle stesse forze dei pneumatici sui momenti angolari di rollio e di sterzo si può scrivere:

$$Q_\phi = -t\delta(Z_f \cos \phi - Y_f \sin \phi), \quad (2.20)$$

la quale si ottiene considerando le forze Y_f e Z_f sull'avancorsa t che generano il momento di rollio Q_ϕ . Infine considerando l'effetto delle stesse forze Y_f e Z_f sull'asse di sterzo

dell'avantreno si può scrivere:

$$Q_\delta = -K\dot{\delta} + t\{(Y_f \sin \phi - Z_f \cos \phi) \sin \varepsilon - Y_f \gamma \cos \varepsilon\} \delta - (Y_f \cos \phi + Z_f \sin \phi) + \tau, \quad (2.21)$$

in cui K è il coefficiente di un generico ammortizzatore di sterzo applicato allo sterzo, Z_f è la forza verticale esercitata dall'avantreno sul pneumatico anteriore, t è l'avancorsa e τ è la coppia applicata dal pilota allo sterzo. Come è possibile notare, le forze generalizzate (2.18), (2.19) (2.20) e (2.21) dipendono dalle forze Y_r , Y_f e Z_f agenti sui pneumatici. Pertanto nel prossimo paragrafo si introdurranno le forze laterali Y_r , Y_f e le principali variabili che le caratterizzano. Si noti che la forza verticale Z_f , per ipotesi è assunta costante come indicato in tabella 2.1.

2.7 Le forze tra il pneumatico ed il terreno

In questo paragrafo verranno introdotte le espressioni delle forze tra pneumatico e terreno nella direzione ortogonale al moto che indicheremo con Y_r e Y_f . Saranno inoltre descritti i principali parametri che maggiormente influenzano un pneumatico. Da un punto di vista macroscopico, le forze che si generano nell'interazione tra pneumatico e terreno, possono essere decomposte lungo i suoi tre assi come riportato in figura 2.9 in cui:

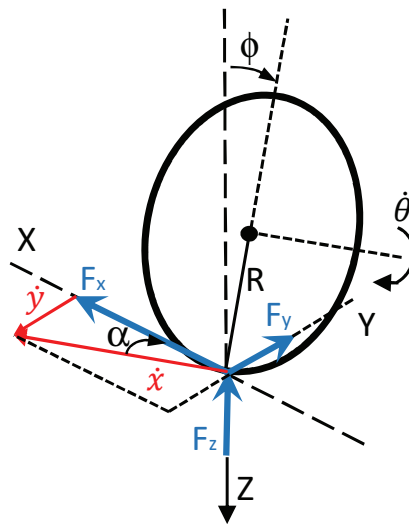


Figura 2.9. Forze che nascono nei punti di contatto ruota-terreno.

- F_x = forza longitudinale (tangente alla direzione di spostamento della ruota);
- F_y = forza laterale (ortogonale alla direzione di spostamento della ruota);

- F_z = forza verticale (ortogonale al piano di appoggio della ruota).

In accordo con l'orientazione dei sistemi di riferimento introdotti nel paragrafo 2.2, la forza verticale F_z , come mostrato in figura 2.9 è assunta negativa se ha direzione z uscente dal piano stradale. Come spiegato in [2] la forza laterale F_y dipende principalmente dalle seguenti quantità:

- lo slittamento laterale α definito come:

$$\tan \alpha = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad (2.22)$$

in cui \dot{x} è la velocità di avanzamento del pneumatico e \dot{y}_1 è la velocità laterale del punto di contatto del pneumatico;

- l'angolo di rollio o di camber (campanatura) ovvero l'angolo formato dal piano di rotazione della ruota e dalla verticale al piano della strada.

In generale le forze che agiscono sui pneumatici sono descritte da equazioni non lineari, spesso dipendenti da combinazioni di funzioni trigonometriche. Per piccoli slittamenti laterali α e angoli di camber ϕ limitati, la forza laterale può essere espressa tramite l'espressione lineare:

$$Y = C_\alpha \alpha + C_\phi \phi, \quad (2.23)$$

dove C_α e C_ϕ sono dei coefficienti di rigidità, rispettivamente di deriva e di rollio tipici del tipo di pneumatico che si sta utilizzando.

Infine, test sperimentali hanno mostrato che esiste un tempo di ritardo tra le forze ed il loro effetto. Per tener conto di tale effetto è necessario introdurre un'equazione di rilassamento del tipo:

$$\frac{\sigma}{\dot{x}_1} \dot{F} + F = F' \quad (2.24)$$

in cui:

- σ è la lunghezza di rilassamento del pneumatico;
- \dot{x}_1 è la velocità di avanzamento della ruota;
- F è il valore della forza;
- F' è il valore della forza a regime.

Utilizzando la (2.23) e la (2.24) è possibile definire le forze cercate Y_r e Y_f introdotte nel calcolo delle forze generalizzate come soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_f}{\dot{x}_1} \dot{Y}_f + Y_f &= C_{f1} \alpha_f + C_{f2} \phi_f \\ \frac{\sigma_r}{\dot{x}_1} \dot{Y}_r + Y_r &= C_{r1} \alpha_r + C_{r2} \phi_r. \end{aligned} \quad (2.25)$$

in cui devono essere introdotti nuovi termini incogniti rappresentati dai coefficienti di slittamento α_f , α_r e dagli angoli di camber ϕ_r e ϕ_f che dipendono dalla configurazione di assetto del pneumatico. Essi verranno descritti nel seguito.

2.7.1 Parametri cinematici delle forze del pneumatico

Nel presente paragrafo verranno calcolati gli angoli di camber ϕ e di deriva α rispettivamente per la ruota anteriore e posteriore.

Angoli di camber ruota anteriore e posteriore

Per il calcolo degli angoli di camber anteriore ϕ_f e posteriore ϕ_r si farà riferimento alla

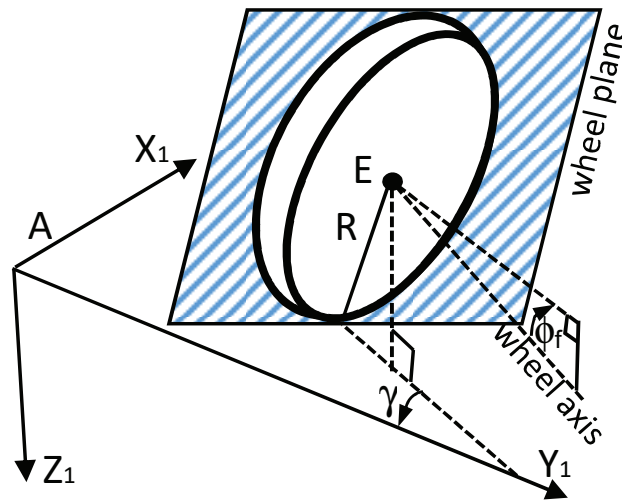


Figura 2.10. Angolo di camber del pneumatico anteriore.

figura 2.10 in cui è rappresentata la ruota anteriore del motoveicolo disposta in posizione e orientazione del tutto generica. Ricordando la definizione di angolo di camber data nel paragrafo 2.7 e facendo riferimento a quanto dimostrato in [2], ϕ_f può essere scritto come:

$$\phi_f = \arcsin(\cos \delta \sin \phi + \cos \phi \sin \delta \sin \varepsilon), \quad (2.26)$$

mentre per la ruota posteriore l'angolo di camber è semplicemente dato da:

$$\phi_r = \phi. \quad (2.27)$$

Coefficienti di slittamento della ruota anteriore e posteriore

Nel presente paragrafo saranno trattati i coefficienti di slittamento del pneumatico anteriore e posteriore. In figura 2.11 viene rappresentata una configurazione generica del

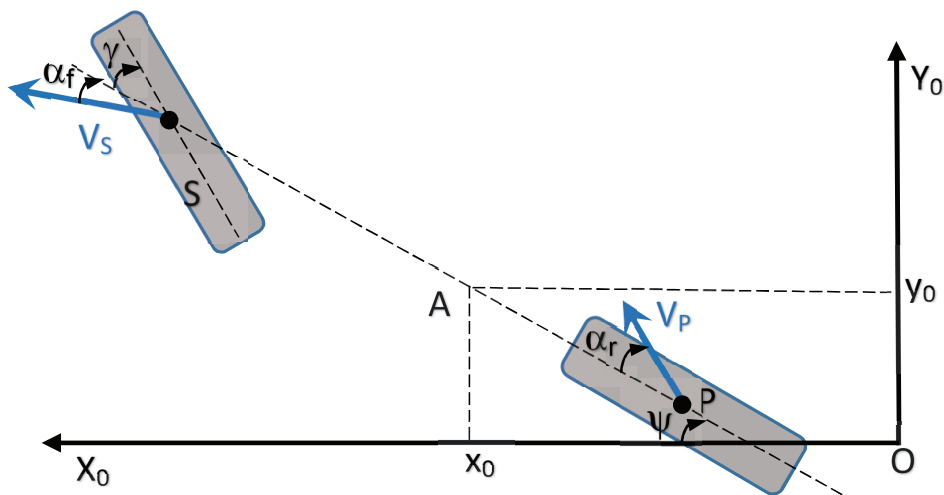


Figura 2.11. Slittamenti laterali della ruota anteriore e posteriore.

veicolo durante il moto. In base alla definizione di slittamento dato dalla (2.22), applicando tale equazione sia alla ruota anteriore che a quella posteriore si possono ricavare le seguenti espressioni:

$$\alpha_r = -\arctan \left[\frac{\dot{y}_1 - b\dot{\psi}}{\dot{x}_1} \right]. \quad (2.28)$$

$$\alpha_f = -\arctan \left[\frac{\dot{y}_1 + l\dot{\psi} - t\dot{\delta}}{\dot{x}_1} \right] + \gamma, \quad (2.29)$$

in cui γ è l'angolo di sterzata effettivo che verrà calcolato di seguito.

Angolo di sterzata effettivo

L'ultima variabile caratterizzante le forze agenti tra pneumatico e terreno è rappresentata dall'angolo di sterzata effettivo γ . Si osservi la figura 2.10, come spiegato in [2] tale angolo può essere definito come l'intersezione dell'angolo di sterzo δ con il piano stradale e può essere scritto come:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{\cos \varepsilon \sin \delta}{\cos \delta \cos \phi - \sin \delta \sin \varepsilon \sin \phi} \right). \quad (2.30)$$

2.8 Equazioni di moto del motoveicolo

Noti i coefficienti di slittamento α , gli angoli di camber ϕ di entrambi i pneumatici e l'angolo effettivo di sterzata γ , utili per descrivere le forze Y_r e Y_f , è ora possibile risolvere le equazioni di moto del veicolo proposto. Il modello matematico sarà descritto da 4 equazioni

differenziali che vengono risolte secondo il seguente schema iterativo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_{q_i}, \quad (2.31)$$

in cui:

$$q = \begin{bmatrix} y_1 \\ \psi \\ \phi \\ \delta \end{bmatrix} \quad Q_q = \begin{bmatrix} Q_{y_1} \\ Q_\psi \\ Q_\phi \\ Q_\delta \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Alle equazioni del sistema derivate dalle (2.31) vanno aggiunte le due equazioni differenziali date dalle (2.25) che descrivono il comportamento dinamico delle forze Y_r e Y_f . Nella (2.31) l'indice $i = 1 \dots 4$ individua l' i -esima componente rispettivamente dei vettori delle coordinate generalizzate q e delle forze generalizzate Q_q . Sostituendo l'energia cinetica T e il potenziale V ricavate nei paragrafi 2.5.1 e 2.5.2, la risoluzione di tale sistema di equazioni porta alla determinazione di 4 equazioni di moto non lineari. Tali equazioni sono costituite da centinaia di termini e non possono essere manipolate in modo semplice. Basti pensare che la loro memorizzazione in un semplice file di testo occupa circa 30 Mb. Pertanto data la lunghezza e complessità delle equazioni non lineari la loro scrittura dovrà essere omessa. A causa delle difficoltà di trattazione del modello non lineare si dovrà limitare l'analisi al caso linearizzato. Di seguito il sistema di equazioni non lineari derivanti dalla (2.31) verrà linearizzato rispetto agli angoli $(\phi, \delta) = 0$ che definiscono la configurazione di equilibrio verticale del motoveicolo. Il paragrafo seguente sarà dedicato all'analisi del comportamento del veicolo intorno alla condizione di equilibrio verticale corrispondente a $(\phi, \delta) = 0$.

2.8.1 Soluzione delle equazioni di moto linearizzate

Determinate le equazioni di moto non lineari e definito il punto di linearizzazione $(\phi, \delta) = (0, 0)$ che corrisponde al motociclo in posizione verticale, le equazioni derivanti dal sistema (2.31) possono essere linearizzate usando lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto $(\phi, \delta) = (0, 0)$.

Nonostante la linearizzazione delle equazioni non lineari anche il calcolo delle soluzioni del sistema linearizzato corrispondente dà origine ad equazioni composte da centinaia di termini altrettanto difficili da gestire. Per passare in modo agevole ad una rappresentazione lineare in spazio di stato matematicamente trattabile, è preferibile passare alla rappresentazione numerica anche dei parametri geometrici delle equazioni. I parametri geometrici utilizzati sono quelli riportati in tabella 2.1. Per la rappresentazione in spazio di stato si

definerà il seguente vettore di stato:

$$X = [\phi \delta \dot{y}_1 \psi \dot{\phi} \delta \dot{Y}_r Y_r]^T. \quad (2.33)$$

Pertanto il sistema linearizzato in evoluzione libera sotto l'ipotesi di velocità costante può essere riscritto in spazio di stato nel seguente modo:

$$\dot{X} = A(\dot{x}_1)X, \quad (2.34)$$

in cui $A(\dot{x}_1)$ è la matrice dinamica del modello considerato, parametrizzato rispetto alla velocità di marcia del veicolo. La matrice A ha dimensioni $n \times n$ dove n indica la dimensione del vettore di stato X . Essa ha la seguente forma:

$$A(\dot{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.005 & 0.6321 & 0 & 0.3104\dot{x}_1 & 0.00222\dot{x}_1 & 0.02-0.01163\dot{x}_1 & -0.006248 & -0.003382 \\ -12.1 & -3.382 & 0 & -0.3692\dot{x}_1 & 0.003937\dot{x}_1 & 0.03373\dot{x}_1+0.3491 & -0.009621 & 0.02997 \\ 0.7212 & -0.05211 & 0 & -1.6\dot{x}_1 & -0.02379\dot{x}_1 & 0.01685-0.005704\dot{x}_1 & 0.008337 & 0.003054 \\ 280.6 & 128.8 & 0 & -1.715\dot{x}_1 & 4.58\dot{x}_1 & -0.04993\dot{x}_1-15.57 & 0.02176 & -0.317 \\ 5441\dot{x}_1 & 0 & -64933 & 31155 & 0 & 0 & -4.101\dot{x}_1 & 0 \\ 3911\dot{x}_1 & 43266\dot{x}_1 & -46566 & -43522 & 0 & 5393 & 0 & -4.167\dot{x}_1 \end{bmatrix}.$$

Una volta determinata la matrice dinamica $A(\cdot)$ è possibile affrontare un'analisi di stabilità di tipo modale. L'analisi modale permette di analizzare i moti che si possono sviluppare naturalmente, nell'intorno della configurazione di equilibrio. Dal punto di vista fisico, ogni grado di libertà del sistema lasciato libero dai vincoli genera un modo di vibrare elementare e la combinazione di questi modi origina i modi vibrazionali caratteristici del sistema motoveicolo.

Dal punto di vista matematico l'analisi modale verrà affrontata mediante il calcolo degli autovalori della matrice $A(\cdot)$ al variare del parametro velocità di avanzamento. Gli autovalori della matrice $A(\cdot)$ si calcolano tramite la relazione:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad (2.35)$$

dove $p(\lambda)$ si definisce polinomio caratteristico associato alla matrice A e I è la matrice identità avente la stessa dimensione di A . Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ forniscono gli autovalori λ di $A(\cdot)$. Essi sono generalmente complessi, ovvero:

$$\lambda = s_r + is_i. \quad (2.36)$$

In generale, la parte reale s_r dell'autovalore fornisce informazioni sullo smorzamento dei modi, mentre la parte immaginaria s_i fornisce informazioni sulle relative frequenze ν associate al modo λ :

$$\nu = \frac{s_i}{2\pi}. \quad (2.37)$$

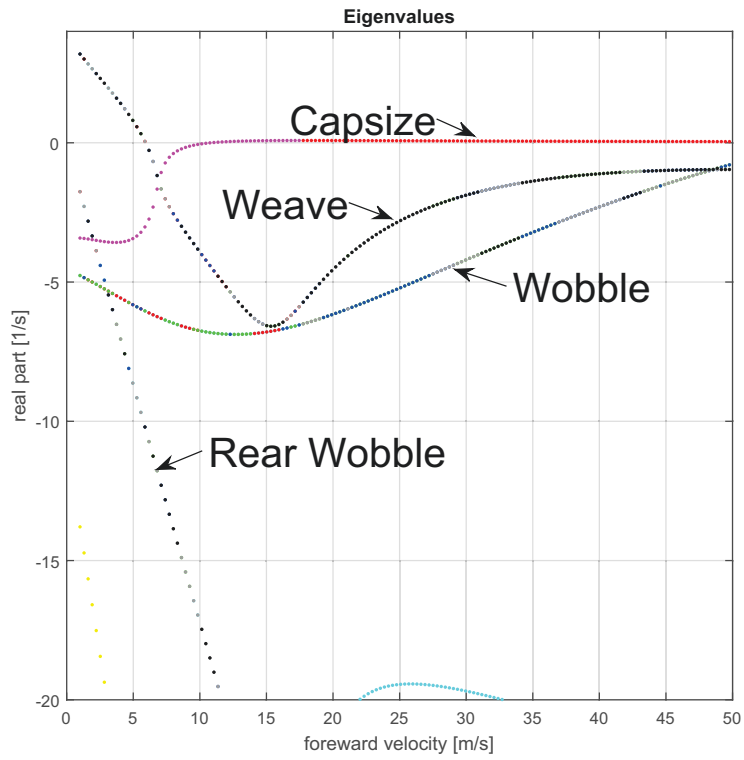
In particolare, nel modello analizzato, i modi eccitati sono quelli out-of-plane, la cui parte reale degli autovalori fornisce informazioni sulla stabilità laterale della motocicletta. Il moto è instabile se s_r ha valore positivo, mentre è stabile se ha valore negativo.

Per mostrare l'effetto dei modi sulla stabilità del motoveicolo è utile ricorrere ad una rappresentazione grafica degli autovalori in funzione delle velocità di avanzamento. Variando \dot{x}_1 della matrice $A(\cdot)$ con valori numerici che vanno da 1 a 50 m/s e graficando i corrispondenti autovalori punto per punto si ottiene il grafico dei modi di vibrazione che possono innescarsi nella motocicletta al variare della velocità \dot{x}_1 . In figura 2.12 sono graficati i modi di vibrazione che in letteratura vengono chiamati *capsize*, *weave* e *wobble* e le relative frequenze.

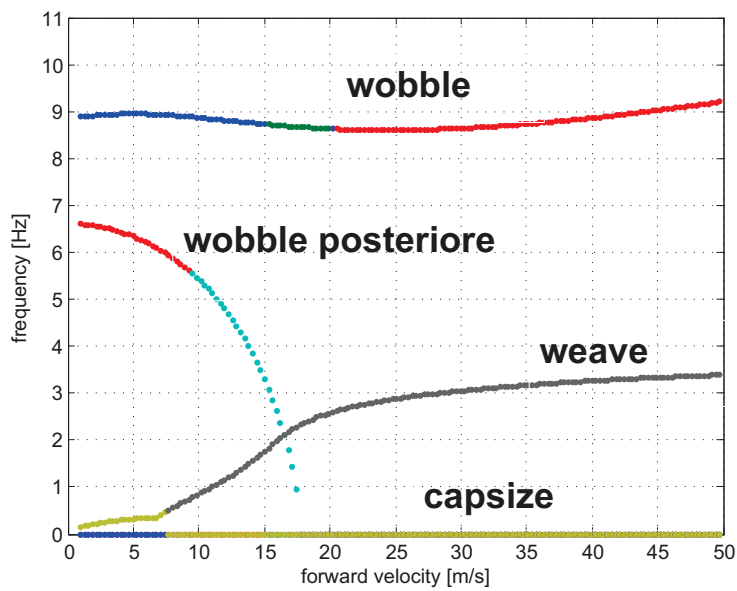
I veicoli a due ruote sono sistemi intrinsecamente instabili perché senza il controllo del pilota essi, dopo un intervallo di tempo più o meno lungo cadono lateralmente. Il primo modo di vibrazione che caratterizza l'instabilità laterale, è noto con il termine inglese *capsize*, (dall'inglese *to capsize*, capovolgersi lateralmente) e si differenzia dagli altri per la sua natura non vibrante. Il grado di stabilità di questo modo dipende dalle caratteristiche geometriche del veicolo: la lunghezza del passo, l'altezza dei baricentri, l'avancorsa, ecc.

Il primo dei modi vibranti è quello di *weave*, ovvero di serpeggiamento. Esso coinvolge principalmente il retrotreno del veicolo e si presenta come un moto oscillatorio che interessa sia lo spostamento laterale dello sterzo sia l'angolo di rollio e di imbardata. Anche il *weave* dipende dai parametri già elencati per il *capsize*, dalla velocità di avanzamento del motoveicolo e ha una frequenza compresa tra 2 Hz e 4 Hz. Come si può osservare in figura 2.12 il *weave* risulta instabile alle basse velocità, stabile alle medie velocità e debolmente stabile alle alte velocità.

Il secondo dei modi vibranti è noto con il termine di *wobble*, dall'inglese *to wobble*, tremare. Anch'esso dipende dalla velocità \dot{x}_1 , coinvolge solo marginalmente il retrotreno della motocicletta, è caratterizzato da un moto oscillatorio dell'avantreno attorno all'asse dello sterzo e ha frequenze variabili da 8,5 a 9,6 Hz. Il modo *wobble* è smorzato a bassa e medie velocità, diventa leggermente instabile alle alte velocità. Infatti, le oscillazioni associate a questo modo sono le più pericolose in quanto la loro alta frequenza ne rende difficile il controllo da parte del pilota.



(a) Parte reale dei modi di vibrare



(b) Frequenze dei modi di vibrari

Figura 2.12. Parte reale e frequenze dei modi di vibrare capsizes, weave e wobble

Estensioni della dinamica e modello a trazione integrale

3.1 Approccio metodologico

In questo capitolo si affronterà la problematica dell'estensione dei comportamenti dinamici del motoveicolo a situazioni non contemplate dal modello semplificato introdotto nel capitolo precedente. Verranno perciò introdotti dei nuovi gradi di libertà al modello portandoli da 4 a 7. Rispetto al modello iniziale, descritto ampiamente nel capitolo precedente, saranno aggiunte le seguenti dinamiche:

- dinamica di moto nella direzione di avanzamento del veicolo;
- dinamica di moto delle ruote posteriore ed anteriore.

Il modello così ottenuto presenta 7 gradi libertà. Esso verrà successivamente confrontato in simulazione con il modello semplificato nelle stesse condizioni di esercizio e, nel capitolo successivo, sarà testato in simulazione in differenti condizioni: in fase di accelerazione e decelerazione, in curva e in situazioni dinamiche più complesse che contemplino alcune tipiche cadute quali ad esempio quelle denominate in letteratura lowside e highside.

3.2 Estensione delle equazioni di moto

In questo paragrafo verranno calcolate le equazioni di moto corrispondenti alle dinamiche aggiunte che permetteranno di ampliare l'insieme dei comportamenti dinamici mostrati

dal modello del motoveicolo. A tale scopo si andrà a rimuovere una serie di ipotesi semplificative introdotte per il modello semplificato di partenza. Ricordando in particolare che nel modello semplificato si è considerato il motociclo a velocità costante, in moto uniforme, per migliorarne il comportamento dinamico, in modo da considerare condizioni di moto più generali, in prima istanza si provvederà a rimuovere l'ipotesi iniziale di velocità di marcia costante, e in seconda istanza si aggiungeranno le seguenti ulteriori ipotesi:

- le ruote attuate possono essere soggette a scivolamento nella direzione di avanzamento.
- le forze di contatto possono interagire tra loro.

Nel seguito si forniranno gli strumenti e i risultati per determinare le equazioni di moto che estendono il modello proposto.

3.2.1 Equazione di moto nella direzione di avanzamento

Il presente paragrafo sarà dedicato a determinare un'ulteriore equazione, da aggiungere al modello esteso, che sia in grado di descrivere il moto di avanzamento del motociclo non soggetto al vincolo di velocità di avanzamento costante ipotizzato nel modello semplificato di partenza. Si consideri il motociclo riportato in figura (3.3). L'analisi del moto longitudinale

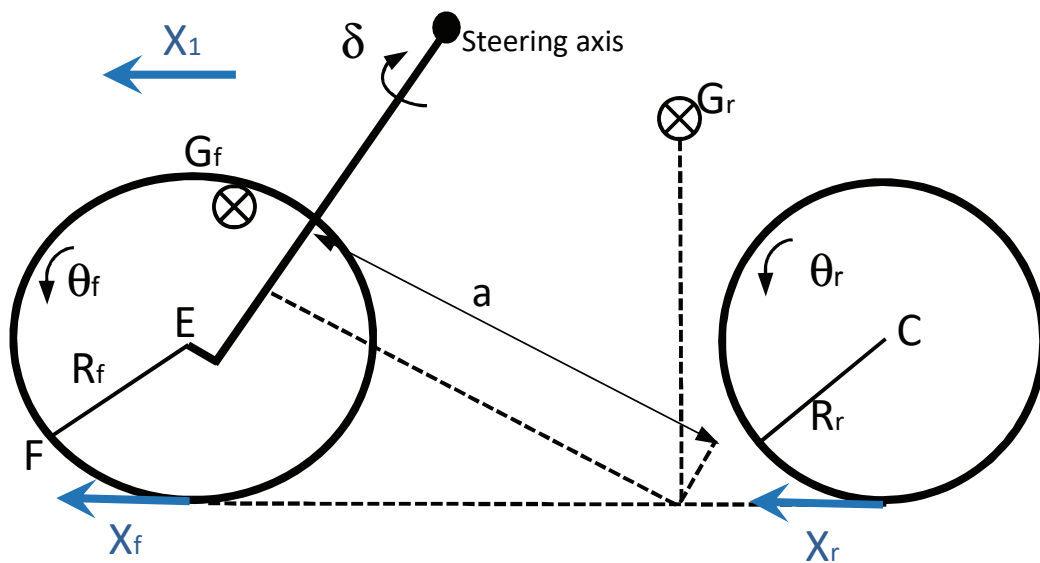


Figura 3.1. Forze agenti nella direzione di avanzamento del veicolo.

sarà condotto mediante lo studio della quantità di moto P del sistema di corpi rigidi che lo compongono. La dinamica del sistema verrà dedotta come soluzione del secondo principio della dinamica espresso in termini di quantità di moto (prima equazione cardinale della dinamica), ovvero:

$$F = \frac{dP}{dt}, \quad (3.1)$$

dove F è il bilancio delle forze esterne agenti sul sistema e P è la quantità di moto totale del sistema.

Il veicolo in figura è fisicamente riconducibile ad un sistema di due corpi rigidi (avantreno e retrotreno). Ricordando che in un sistema costituito da più corpi rigidi, la quantità di moto totale del sistema è data dalla somma delle quantità di moto p_i di ogni singolo corpo i -esimo che lo compone, la soluzione della (3.1) sarà dedotta a partire dalla quantità di moto dei singoli corpi rigidi. Le quantità di moto di avantreno e retrotreno sono rispettivamente:

$$p_r = M_r v_r \quad (3.2a)$$

$$p_f = M_f v_f, \quad (3.2b)$$

in cui:

- M_r e M_f sono le masse dei corpi rigidi posteriore e anteriore;
- v_r e v_f sono le velocità di traslazione dei corpi rigidi posteriore e anteriore.

Le velocità di traslazione v_r e v_f sono note dalle equazioni (2.7) e (2.8). L'equazione nella direzione longitudinale del moto può essere banalmente calcolata applicando la (3.1) in cui la quantità di moto totale P è la somma delle quantità di moto p_r e p_f e quindi il problema si riconduce semplicemente al calcolo delle derivate temporali delle quantità di moto (3.2a) e (3.2b). Tale operazione di derivazione andrà chiaramente effettuata previa linearizzazione delle velocità espresse in (2.7) e (2.8) rispetto alle condizioni di equilibrio verticale, essendo la trattazione sempre relativa al modello linearizzato del motoveicolo. Il risultato del calcolo fornisce la seguente equazione:

$$(M_r + M_f)\ddot{x}_1 - (M_f + M_r)\dot{y}_1 \dot{\psi} - M_f k \dot{\psi}^2 - M_f e \cos \varepsilon \dot{\delta}^2 - 2M_f e \dot{\psi} \dot{\delta} - 2(M_r h + M_f j) \dot{\psi} \dot{\phi} = X_r + X_f. \quad (3.3)$$

in cui:

- $X_r + X_f$ esprime il bilancio delle forze esterne agenti durante il moto longitudinale nei punti di contatto tra veicolo e terreno;
- $(M_r + M_f)$ è la massa totale del veicolo;
- \ddot{x}_1 è l'accelerazione del motoveicolo nella direzione longitudinale del moto.

3.3 Equazione di moto delle ruote

Il presente paragrafo tratterà la problematica dell'inserimento, nel modello con dinamica estesa, del moto di rotolamento delle ruote. Per le ipotesi fatte sul modello semplificato di

partenza, le ruote sono parte integrante dei due corpi rigidi costituenti il motoveicolo che si sposta a velocità costante e quindi per tale modello la dinamica delle ruote non aveva rilevanza.

Volendo estendere le analisi delle prestazioni del motoveicolo a condizioni più realistiche, e quindi non vincolate all'ipotesi di velocità costante, è necessario dover introdurre una descrizione del comportamento dinamico delle ruote. Per affrontare questo problema, un classico approccio usato in letteratura è quello di associare a ciascuna ruota un corpo rigido (diversi da quello dell'avantreno e del retrotreno ipotizzati nel modello semplificato) e quindi risolvere le equazioni di moto con i metodi di analisi multibody. Tale soluzione aumenta il numero di gradi di libertà e di parametri del sistema ed è largamente usata negli approcci che usano modelli di simulazione basati su software multibody visto che in essi il fattore complessità computazionale è meno rilevante.

Volendo mantenere in questo lavoro gli obiettivi di semplicità e accuratezza del modello, senza tuttavia perdere il legame con la fisica del sistema, si è preferito procedere in modo differente mantenendo l'ipotesi delle ruote vincolate ai rispettivi corpi rigidi, affrontando la trattazione del moto delle ruote ricorrendo alle equazioni cardinali della dinamica. Questo permetterà di non dover modellare nuovamente l'intero sistema e di mantenere validi i parametri e la geometria introdotti inizialmente. Nel seguito andremo a particolareggiare le equazioni di moto per ciascuna ruota e a derivarne la relativa dinamica.

3.3.1 Equazione di moto della ruota posteriore

La dinamica della ruota posteriore è influenzata sia dalle forze esterne che agiscono su di essa e sia dalle condizioni di assetto del veicolo. Per poterne descrivere in modo esauriente

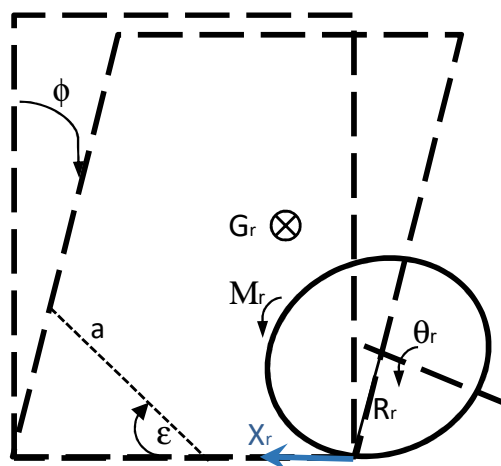


Figura 3.2. Forze e momenti che agiscono sulla ruota posteriore.

l'equazione di moto, si utilizzerà un approccio basato sulla seconda equazione cardinale

della dinamica:

$$\frac{dL}{dt} = \Gamma \quad (3.4)$$

che permette di descrivere la coppia totale Γ agente su un corpo in rotazione attorno ad un sistema di assi principali (vedere A.2.2).

Considerando la ruota posteriore in una generica posizione di assetto del veicolo, come mostrato in figura 3.2, riferendosi ai suoi assi principali d'inerzia, il tensore d'inerzia i_{rw} ad essa associato può essere scritto come:

$$i_{rw} = \begin{bmatrix} i_{r_x} & 0 & 0 \\ 0 & i_{r_y} & 0 \\ 0 & 0 & i_{r_z} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

in cui i_{r_x} , i_{r_y} e i_{r_z} sono i momenti d'inerzia polari della ruota posteriore. Utilizzando l'equazione (A.19) è possibile definire il momento angolare L_{rw} della ruota posteriore:

$$L_{rw} = i_{rw} \omega_{rw}, \quad (3.6)$$

dove ω_{rw} è dato dalla (2.13). Derivando la (3.6) si ottiene il primo membro della (3.4) la cui componente lungo l'asse di rotazione della ruota posteriore origina:

$$\Gamma_{ry} = i_{r_y} \ddot{\theta}_r + i_{r_y} \psi \dot{\phi}. \quad (3.7)$$

Esplicitando i momenti delle forze esterne Γ_{ry} agenti sulla ruota come bilancio dei momenti generati dalle forze d'attrito col terreno e dei momenti meccanici esterni, la (3.7) può essere riscritta come:

$$i_{r_y} \ddot{\theta}_r + i_{r_y} \psi \dot{\phi} = R_r X_r + M_r, \quad (3.8)$$

dove X_r è la risultante delle forze d'attrito tra il terreno e la ruota posteriore e M_r sono i momenti meccanici esterni complessivi agenti sulla ruota posteriore.

L'equazione (3.8) descrive la dinamica della ruota posteriore che tiene conto sia delle forze esterne agenti sulla ruota sia delle condizioni di assetto del veicolo.

3.3.2 Equazione di moto della ruota anteriore

Così come avviene per la ruota posteriore, anche la ruota anteriore sarà influenzata sia dalle forze esterne agenti su di essa, sia dalle condizioni di assetto e di sterzata del veicolo. Procedendo in modo analogo a quanto fatto per la ruota posteriore, si andrà a particolarizzare l'equazione (3.4) al caso della ruota anteriore. Si consideri pertanto la ruota anteriore in una generica condizione di assetto del veicolo come mostrato in figura 3.3.

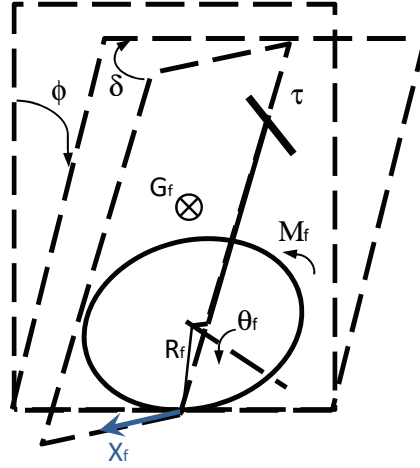


Figura 3.3. Forze e momenti che agiscono sulla ruota anteriore.

Si definisce il tensore d'inerzia i_{fw} della ruota anteriore come:

$$i_{fw} = \begin{bmatrix} i_{fx} & 0 & 0 \\ 0 & i_{fy} & 0 \\ 0 & 0 & i_{fz} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

in cui i_{fx} , i_{fy} e i_{fz} rappresentano i momenti d'inerzia polari della ruota. Con una procedura del tutto analoga a quella usata per la ruota posteriore, utilizzando l'equazione (A.19) è possibile definirne il momento angolare L_{fw} :

$$L_{fw} = i_{fw} \omega_{rw}, \quad (3.10)$$

dove ω_{rw} è dato dalla (2.14). Derivando la (3.10) si ottiene il primo membro della (3.4) la cui componente lungo l'asse di rotazione della ruota anteriore origina:

$$\Gamma_{fy} = i_{fy} \ddot{\theta}_f + i_{fy} \dot{\psi} \dot{\phi} - i_{fy} \cos \varepsilon \dot{\phi} \dot{\delta} + i_{fy} \sin \varepsilon \dot{\psi} \dot{\delta}. \quad (3.11)$$

Esplicitando i momenti delle forze esterne Γ_{fy} agenti sulla ruota come bilancio dei momenti generati dalle forze d'attrito col terreno e dei momenti meccanici esterni, la (3.11) può essere riscritta come:

$$i_{fy} \ddot{\theta}_f + i_{fy} \dot{\psi} \dot{\phi} - i_{fy} \cos \varepsilon \dot{\phi} \dot{\delta} + i_{fy} \sin \varepsilon \dot{\psi} \dot{\delta} = R_f X_f + M_f, \quad (3.12)$$

in cui X_f è la risultante delle forze di attrito tra il terreno e la ruota anteriore, mentre M_f rappresenta i momenti meccanici esterni complessivi agenti sulla ruota anteriore.

La (3.12) descrive la dinamica della ruota anteriore tenendo conto sia delle forze esterne

agenti sulla ruota anteriore che delle condizioni di assetto e sterzata del veicolo.

3.4 Forze del pneumatico nella direzione di avanzamento

Per poter trattare in modo esaustivo le equazioni introdotte nel modello a dinamica estesa è necessario approfondire la conoscenza delle forze di attrito che si generano nella direzione di avanzamento, ovvero delle forze indicate in precedenza con X_r e X_f . Il comportamento dinamico e la stabilità del motoveicolo saranno influenzati dalle caratteristiche di tali forze che a loro volta dipendono sia dalle caratteristiche del pneumatico che dalle condizioni del fondo stradale, pertanto è fondamentale rappresentare adeguatamente le forze che agiscono sul pneumatico in funzione dello slittamento nella direzione di avanzamento e delle caratteristiche del manto stradale.

La difficoltà principale è dovuta alla non linearità e alla dipendenza dal tempo di questi parametri, in letteratura infatti, a partire dagli anni '50 del secolo scorso [4] sono stati presentati diversi modelli matematici, ognuno dei quali aveva uno scopo specifico e presentava diversi livelli di accuratezza e complessità. Sostanzialmente tali modelli si dividono in due categorie: ad un'estremo ci sono i modelli teorici che descrivono con accuratezza e dettaglio il comportamento fisico del pneumatico mediante equazioni matematiche complesse, dall'altro ci sono i modelli empirici che utilizzano equazioni matematiche derivate da dati sperimentali. A loro volta i modelli teorici si dividono in due categorie: la prima si basa su tecniche di calcolo agli elementi finiti (FE) o agli elementi discreti (DE). Queste tecniche sono in grado di rappresentare la deflessione della carcassa e di determinare le forze d'attrito e le coppie che si generano sul battistrada. Inoltre questi modelli sono in grado di descrivere il comportamento di un pneumatico anche in condizioni non stazionarie. La seconda categoria è rappresentata da modelli puramente teorici descritti da equazioni matematiche più semplici, ma allo stesso tempo accurate.

Anche i modelli empirici possono essere classificati in due categorie. Nella prima categoria ci sono i modelli che utilizzano metodi di somiglianza che combinano modelli teorici e modelli empirici. Infine, alla seconda categoria appartengono i modelli totalmente empirici che descrivono funzioni parametriche i cui parametri possono essere variati in modo da adattare la funzione ai dati sperimentali. Tra i vari modelli presenti in letteratura, in questa trattazione è stato utilizzato il modello empirico di Burckhardt [9].

L'introduzione del modello del pneumatico nel modello sviluppato ha permesso di simulare il comportamento del motoveicolo in diverse condizioni di moto, in rettilineo e in curva, in fase di accelerazione e decelerazione, fino ad arrivare a simulare anche due delle più pericolose cadute denominate in letteratura *lowside* e *highside*. Nel prossimo paragrafo verranno introdotti i principali parametri che influenzano il comportamento dinamico di un pneumatico e si introdurrà il modello usato nella presente tesi.

3.4.1 Il modello del pneumatico secondo Burckhardt

Essendo la dinamica e la stabilità di un motoveicolo influenzate dalle caratteristiche dei pneumatici, ed essendo queste ultime strettamente dipendenti dai fenomeni che caratterizzano il contatto tra il pneumatico e la strada, sono proprio le caratteristiche del pneumatico a garantirne la giusta direzionalità, il mantenimento della traiettoria, la frenatura e l'accelerazione. Da un punto di vista fisico le forze X_r e X_f che si generano tra il pneumatico

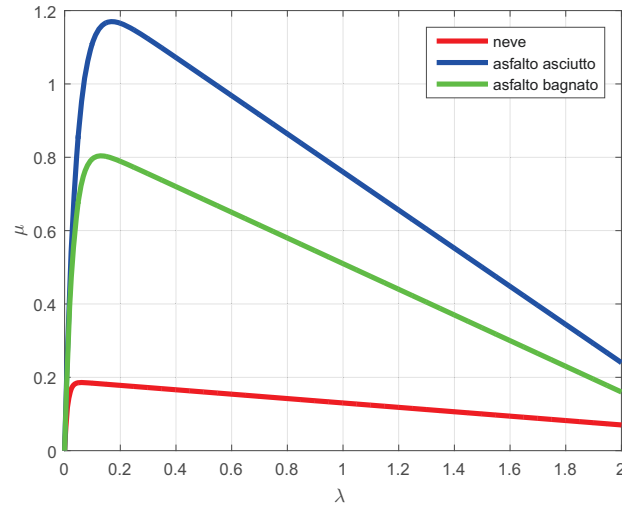


Figura 3.4. Il modello di pneumatico secondo Burckhardt.

ed il terreno sono forze di adesione. La forza di adesione si dimostra essere proporzionale alla forza peso del pneumatico che preme in direzione normale sul punto di contatto con la strada. Matematicamente, questa relazione di proporzionalità, tra la forza di adesione e quella normale al contatto, prende il nome di coefficiente d'attrito che indicheremo con il simbolo μ . Il valore di μ dipende essenzialmente dalla natura del pneumatico stesso (peso, temperatura, pressione) e da quelle del terreno (asfalto, cemento, in condizione di asciutto, bagnato, con neve); possiamo pertanto scrivere:

$$\mu = \frac{F_{adesione}}{F_z}. \quad (3.13)$$

Il coefficiente di attrito che si genera tra il pneumatico ed il terreno non è esprimibile in modo semplice ma deve essere determinato sperimentalmente. Secondo il modello proposto da Burckhardt [9] esso è espresso dalla seguente relazione:

$$\mu = c_1 \left(1 - e^{-c_2 \lambda} \right) - c_3 \lambda, \quad (3.14)$$

dove λ è il coefficiente di slittamento nella direzione di avanzamento del veicolo e c_1 , c_2 e c_3 sono i parametri che definiscono le diverse condizioni di aderenza del terreno, come

mostrate in figura 3.4. La curva μ presenta un andamento del tutto non lineare e permette di descrivere il pneumatico nelle sue differenti condizioni di comportamento al variare del coefficiente di slittamento λ . Visto il legame diretto esistente tra il coefficiente di attrito μ e il coefficiente di slittamento λ , risulta utile ricordarne la definizione in quanto legata ai parametri cinematici del motoveicolo. Riferendosi alla figura 3.5 si definisce il coefficiente

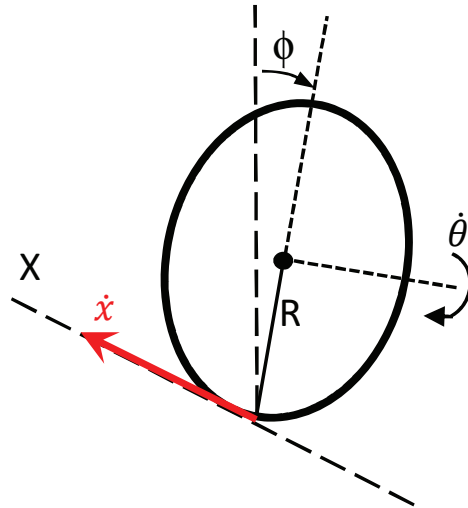


Figura 3.5. Velocità di avanzamento e di rotazione del pneumatico.

di slittamento longitudinale λ [2] come:

$$\lambda = -\frac{\dot{x} - R\dot{\theta}}{\dot{x}}, \quad (3.15)$$

dove \dot{x} , $\dot{\theta}$ ed R sono rispettivamente la velocità di avanzamento del veicolo, la velocità angolare ed il raggio del pneumatico. Il coefficiente di slittamento longitudinale è positivo nel caso di trazione e negativo nel caso di frenata.

Dalla (3.15) si deduce come tale coefficiente permette di legare la cinematica del veicolo alle forze di contatto che durante il moto vengono a generarsi tra pneumatico e terreno. Andremo pertanto a differenziare due coefficienti di slittamento, uno per il pneumatico posteriore ed uno per quello anteriore che chiameremo rispettivamente λ_r e λ_f .

La determinazione di tali coefficienti nelle varie condizioni di assetto durante il moto permetterà di relazionare le forze che si generano su entrambi i pneumatici ai parametri cinematici del motoveicolo rendendo quindi possibile la risoluzione del sistema di equazioni del modello con dinamica estesa. Siamo pertanto in grado di introdurre un nuovo modello del motoveicolo che contempri sia le dinamiche nella direzione di avanzamento, che le interazioni dinamiche (anche complesse) tra ruote e terreno.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.004031 & 0.004031 & 0 & 0 \\
 2.345e^{-5}\delta & -0.004259\delta & 0.0185 & 0.01001 \\
 -0.0001486\delta & -0.004635\delta & -0.01782 & 0.02553 \\
 -4.417e^{-5}\delta & 0.006742\delta & -0.02126 & -0.01296 \\
 0.006179\delta & 0.2393\delta & 0.0353 & -0.3097 \\
 0.2901 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.4242 & 0 & 0 \\
 -10.0\dot{x}_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -10.0\dot{x}_1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4.101\dot{x}_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -4.167\dot{x}_1
 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

la matrice degli ingressi B è:

$$B = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0.0087 & 0 & 0.01701e^{-4} \\
 -0.0554 & 0 & -0.004025e^{-3} \\
 -0.0165 & 0 & -0.02784e^{-4} \\
 2.3025 & 0 & 0.01466e^{-4} \\
 0 & -0.9517 & 0 \\
 0 & 0 & -1.3916 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix},$$

con $U = [\tau M_f M_r]^T$. Si noti che per le simulazioni effettuate utilizzando il modello a sola trazione posteriore, il sistema (3.17) diventa:

$$\dot{X} = A(X)X + BU, \quad (3.19)$$

in cui la matrice $A(\cdot)$ rimane la stessa, mentre la matrice degli ingressi B corrispondente agli ingressi $U = [\tau M_r]^T$ è data da:

$$B = \begin{bmatrix}
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0.0087 & 0 \\
 -0.0554 & 0 \\
 -0.0165 & 0 \\
 2.3025 & 0 \\
 0 & -0.9517 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0
 \end{bmatrix}.$$

Come già svolto per il modello semplificato, una volta determinata la matrice dinamica $A(\cdot)$ del sistema, espressa dalla (3.18), è possibile affrontare l'analisi di stabilità di tipo modale. Nella sezione successiva, utilizzando tale analisi modale si descriverà il primo confronto tra i modi che si ottengono con il modello a dinamiche estese e quelli che si ottengono con il modello semplificato.

3.6 Confronto modale tra il modello esteso ed il modello semplificato di partenza

Prima di iniziare a descrivere le diverse simulazioni effettuate in diverse condizioni di moto, è stato effettuato un primo confronto tra il modello semplificato di partenza descritto dal sistema (2.34) e il modello con dinamiche estese descritto dal sistema (3.17). Per

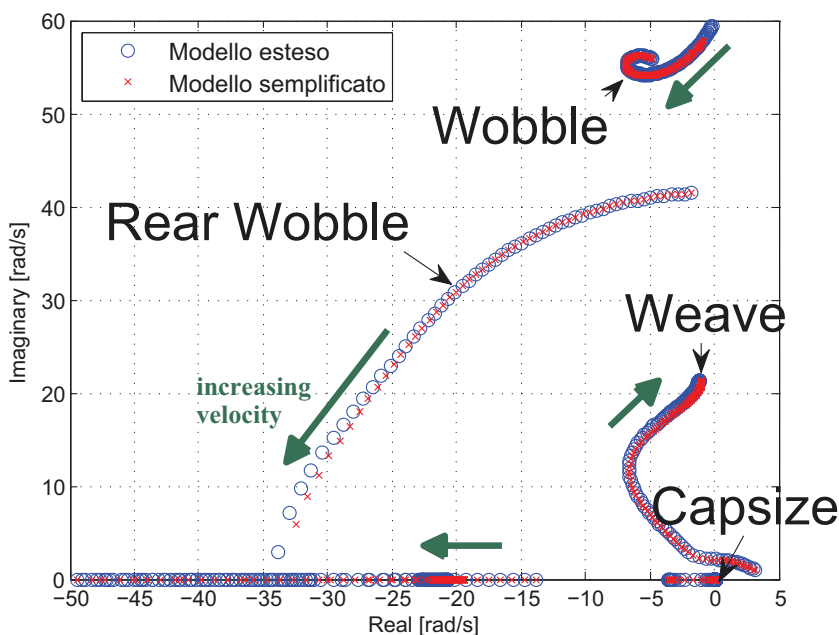


Figura 3.6. Confronto modi di vibrazione tra il modello semplificato e il modello esteso.

comprendere gli effetti delle equazioni (3.3), (3.8) e (3.12) e delle forze agenti sul sistema a dinamiche estese, è stata svolta un'analisi modale complessa, calcolando parte reale e parte immaginaria degli autovalori della matrice $A(\cdot)$ del sistema (2.34) e della matrice $A(\cdot)$ del sistema (3.17). Il confronto degli autovalori è stato svolto considerando entrambi i veicoli nella stessa condizione, cioè in posizione verticale e facendo variare la velocità di avanzamento con valori numerici che vanno da 1 a 50 m/s e graficando i corrispondenti autovalori complessi.

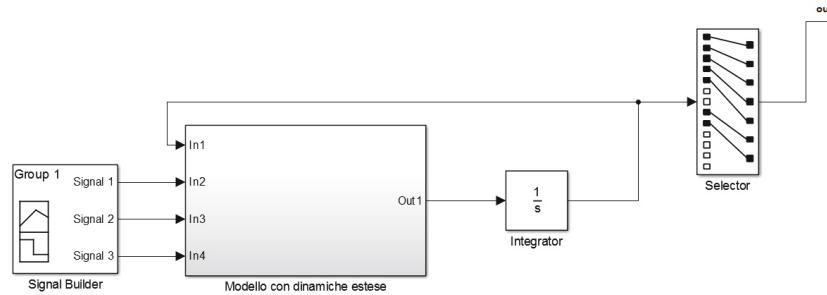
Ciò che si ottiene è il grafico mostrato in figura 3.6: come si può notare anche per il modello a dinamiche estese si ottengono i tre modi di vibrazione capsise, weave e wobble i quali risultano quasi coincidenti con quelli del modello semplificato. Ciò conferma che il nuovo modello contempla i comportamenti del modello di partenza. In particolare, il modello esteso risulta leggermente più stabile, infatti, osservando la stessa figura, è possibile notare che all'aumentare della velocità, tutti e i tre modi di vibrazione si spostano leggermente a sinistra, cioè la parte reale delle radici hanno un valore più negativo. Dall'analisi del grafico è possibile trarre una prima conclusione sul miglioramento del modello a dinamiche estese

rispetto a quello semplificato poiché esso descrive in maniera più accurata le dinamiche di ruota alle medie e alle alte velocità.

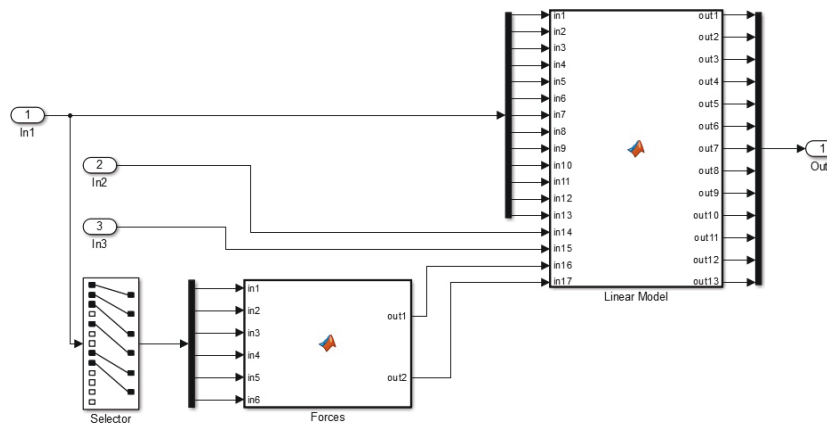
L'analisi modale ed il confronto della stabilità dei modi di vibrazione appena descritti non è sufficiente a descrivere in maniera esaustiva anche i comportamenti in condizione di dinamiche variabili corrispondenti a situazioni reali: fase di accelerazione, frenata, curva sia in condizioni di aderenza che di slittamento, in situazioni più complesse e complicate quali le cadute in curva e di ripartizione di coppia dei due motori. Pertanto il modello è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink in più scenari. Nella sezione successiva si descriverà più specificatamente l'implementazione del sistema nell'ambiente scelto per le simulazioni.

3.7 La piattaforma di simulazione Matlab

Introduciamo brevemente la piattaforma di simulazione scelta e utilizzata per testare il comportamento del modello con dinamiche estese in differenti condizioni di assetto e di movimento. Per l'implementazione del sistema è stato scelto il software Matlab/Simulink.



(a) Modello Simulink relativo alle equazioni del modello con dinamiche estese.



(b) Implementazione del blocco Modello con dinamiche estese.

Figura 3.7. La piattaforma di simulazione in Matlab/Simulink.

In particolare la figura 3.7(a) mostra il blocco che include le equazioni di moto linearizzate del sistema con dinamica estesa. Gli ingressi di questo blocco sono rappresentati da In_1 , In_2 , In_3 e In_4 che sono rispettivamente l'integrale dell'uscita del modello, la coppia di sterzo applicata dal pilota e i momenti meccanici agenti sulle ruote anteriore e posteriore. Inoltre, come mostrato in figura 3.7(b) per implementare la matrice (3.18), lo stesso blocco internamente è stato ulteriormente diviso in due sottoblocchi, uno relativo al calcolo di tutte le equazioni di moto e l'altro relativo alle forze di contatto ruote-terreno calcolate secondo il modello di Burckhardt. In figura (3.7(a)) si nota il blocco "Signal Builder" che permette di generare gli ingressi desiderati per il sistema.

In figura 3.8, le variabili del vettore di stato X sono opportunamente selezionate (demux) per la loro analisi grafica. Quest'ultime sono poi inviate tramite un'interfaccia 3D ad un tool

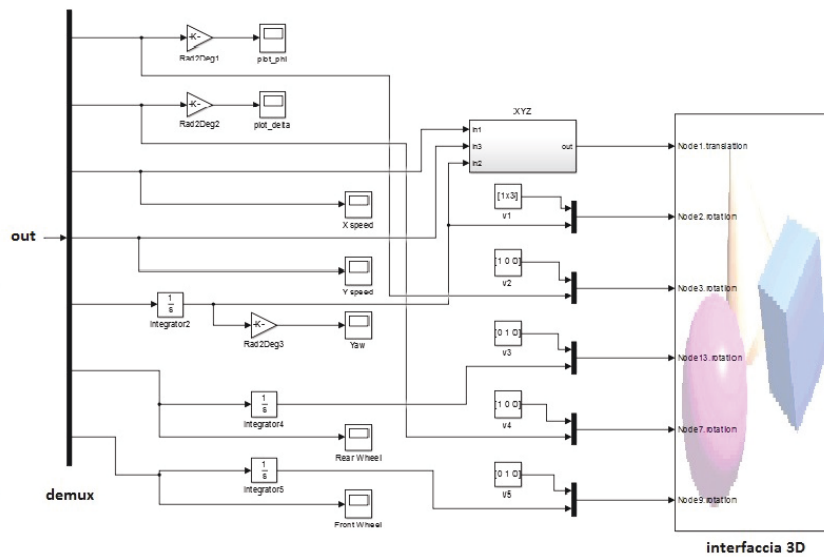


Figura 3.8. Implementazione in Simulink per l'analisi grafica e animata in ambiente 3D.

di grafica virtuale del modello che permette di facilitarne lo sviluppo e il debug. L'animazione in ambiente virtuale può agevolare l'analisi delle performance di un controllore oltre che essere utile ai meno esperti per la comprensione dei risultati della dinamica implementata senza entrare nel merito delle complesse equazioni matematiche che la governano. Come

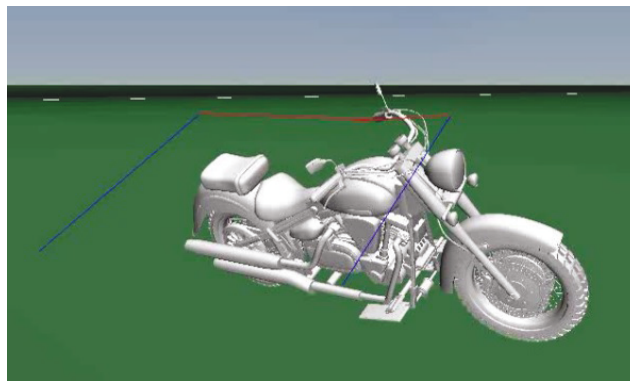


Figura 3.9. La ricostruzione grafica del modello matematico a dinamiche estese.

mostrato in figura 3.9, il modello della motocicletta, cioè i corpi rigidi che lo costituiscono sono stati ricostruiti graficamente con un comune tool 3D di disegno meccanico e poi interfacciati opportunamente con Simulink per ottenere la loro animazione. La scelta di utilizzare software entry-level per la simulazione virtuale in ambiente 3D consente di raggiungere gli obiettivi di analisi prefissati senza far ricorso ad ambienti di simulazione commerciali, quali i software multibody, che richiederebbero costi molto più elevati, fino a diverse decine di migliaia di euro.

Validazione e test del modello in ambiente di simulazione

4.1 Introduzione alle simulazioni

Il presente capitolo riassume i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate con il modello proposto per differenti scenari di simulazione. Il modello ha dimostrato possedere un'elevato livello di flessibilità essendo in grado di simulare, senza particolari modifiche analitiche o implementative, sia il comportamento di un motoveicolo ordinario a trazione posteriore sia quello a trazione integrale. La differenza è semplicemente basata sul mantenere attiva o meno la trazione sulla ruota anteriore.

Il percorso logico seguito nello svolgere le simulazioni ripercorre lo sviluppo del modello proposto. La prima parte di simulazioni si propone di validare il modello in condizioni di sola trazione posteriore in modo da verificare che i comportamenti siano quelli tipici di un motoveicolo ordinario a trazione posteriore di cui saranno descritti 5 differenti scenari.

La seconda parte di simulazioni ha lo scopo di verificare il comportamento del modello proposto funzionante con trazione posteriore quando il veicolo percorre una curva con angoli di rollio rilevanti. Il comportamento è stato confrontato con quello dello stesso modello con angolo di rollio non linearizzato; le risposte sono state quindi confrontate e analizzate ricavandone interessanti considerazioni che hanno permesso di ampliare il campo delle simulazioni verso alcune situazioni tipiche di caduta che sono state affrontate nella successiva serie di simulazioni.

La terza parte di simulazioni amplia lo spettro delle simulazioni del modello a trazione

posteriore a tipici fenomeni di caduta, descrivendo nel dettaglio molti dei fenomeni fisici che insorgono in tali tipiche cadute. Una volta analizzati molti dei tipici comportamenti del motoveicolo in situazioni di trazione posteriore, la quarta ed ultima parte delle simulazioni si occupa di replicare alcuni dei più interessanti comportamenti del motoveicolo con il modello a trazione integrale, in modo da poter confrontare i risultati ottenuti con quelli dello stesso veicolo a sola trazione posteriore.

4.2 Validazione del modello con trazione posteriore

In questa sezione verranno presentati i risultati dei test di validazione del modello in condizione di sola trazione posteriore. In essa saranno descritti e commentati i risultati di 5 differenti scenari di simulazione.

Scenario 1- traiettoria rettilinea in condizioni di aderenza

Si consideri il motoveicolo ad una velocità iniziale di 30 Km/h e coppia di sterzo nulla che

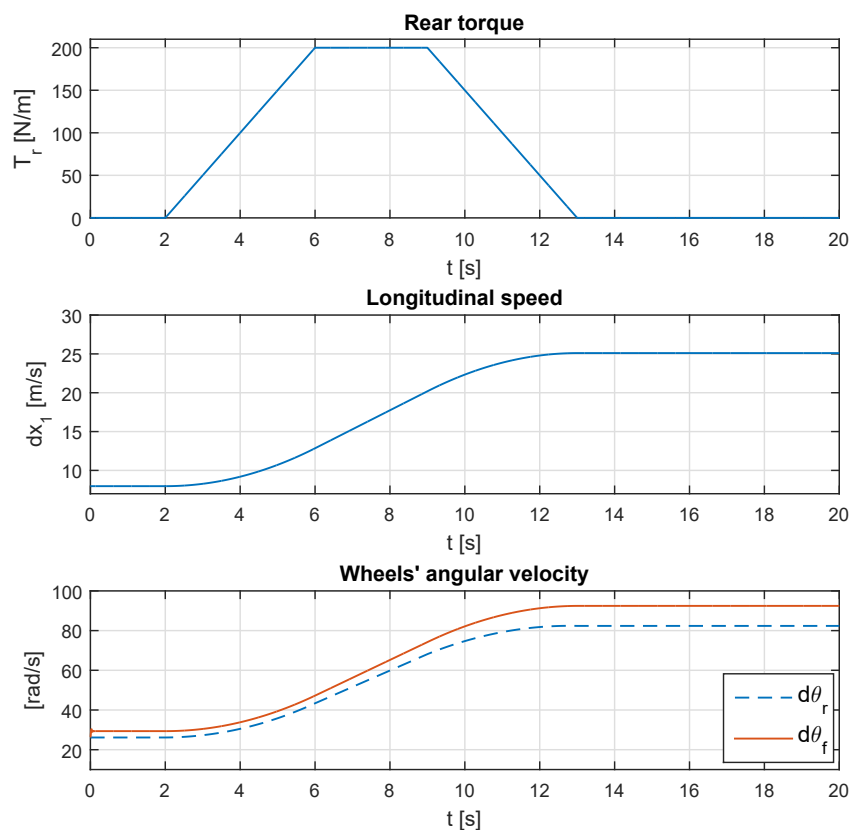


Figura 4.1. Effetto di una coppia applicata sulla velocità di avanzamento e sulle velocità angolari del motoveicolo in condizioni di aderenza.

percorre una traiettoria rettilinea spinto dalla coppia di trazione posteriore, il cui andamento

è descritto in figura 4.1. Nella stessa figura sono indicati gli andamenti della velocità longitudinale \dot{x}_1 del veicolo e le velocità angolari della ruota anteriore $\dot{\theta}_f$ e posteriore $\dot{\theta}_r$. Come si nota, nella finestra temporale 2 – 6 secondi l'andamento della coppia di trazione è linearmente crescente, il veicolo conseguentemente passa quindi da un moto rettilineo uniforme ad un moto in cui la velocità del mezzo \dot{x}_1 cresce corrispondentemente. Nella finestra temporale 6 – 9 secondi la coppia di trazione rimane costante imponendo una accelerazione costante al veicolo la cui velocità longitudinale cresce linearmente. Dopo 9 secondi, in corrispondenza di una coppia linearmente decrescente la velocità del mezzo cresce fino al valore massimo di 25 m/s (90 km/h), raggiunto in corrispondenza della coppia di trazione nulla. Da questo punto in poi il moto torna ad essere rettilineo uniforme, tenendo sempre presente che nel modello le forze aerodinamiche sono state trascurate. Gli andamenti delle velocità angolari $\dot{\theta}_f$ e $\dot{\theta}_r$ delle ruote presentano andamenti simili a quello della velocità longitudinale. Si nota infatti che la coppia di trazione non assume un valore sufficientemente elevato tale da provocare una condizione di scivolamento alla ruota posteriore.

Scenario 2- traiettoria rettilinea in condizioni di slittamento in accelerazione

S...

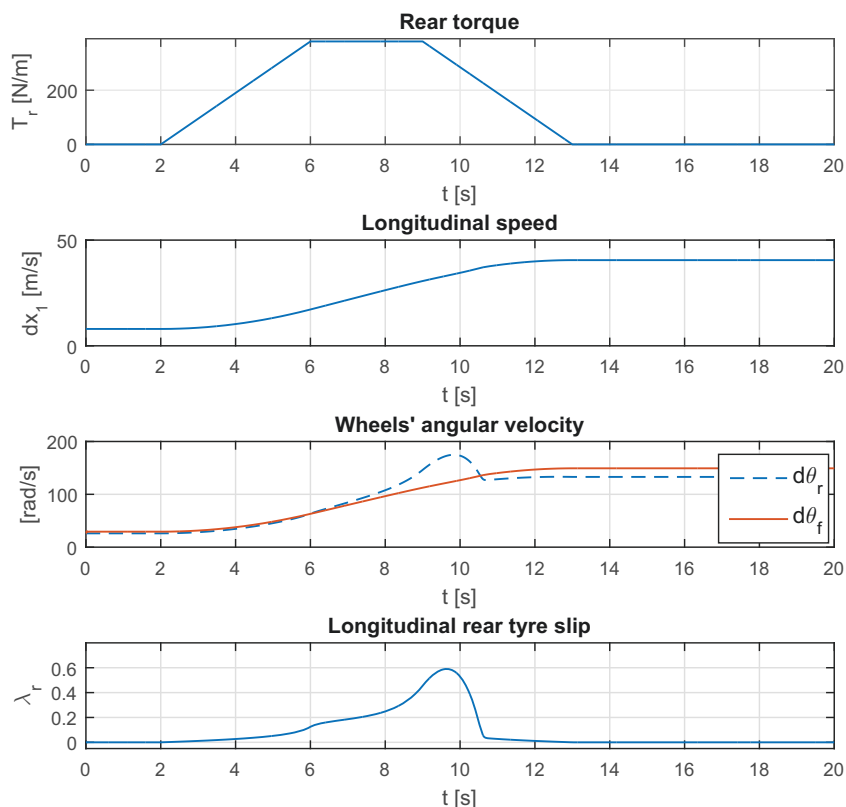


Figura 4.2. Effetto di una coppia applicata sulla velocità di avanzamento e sulle velocità angolari del motoveicolo in condizioni di slittamento.

una coppia di trazione di valore massimo raddoppiato, come evidenziato in figura 4.2. L'andamento della velocità longitudinale del veicolo rimane sostanzialmente invariato ma il valore della velocità massima raggiungibile è maggiore rispetto al primo scenario. Notiamo che nell'intervallo temporale 6.5 - 10.5 secondi l'andamento della velocità angolare $\dot{\theta}_r$ della ruota posteriore presenta uno spike rispetto a quello di $\dot{\theta}_f$ ed è indicativo della condizione di scivolamento alla ruota posteriore che ne fa aumentare la velocità rispetto alla velocità traslazionale \dot{x}_1 del mezzo e rispetto alla velocità $\dot{\theta}_f$. In accordo con quanto appena osservato, nello stesso intervallo temporale c'è un incremento dello slittamento longitudinale. La non linearità del coefficiente di attrito si manifesta dopo 6.5 secondi, in accordo con l'inizio dello spike della velocità angolare $\dot{\theta}_r$. Non appena la coppia di trazione diminuisce sensibilmente, la velocità angolare $\dot{\theta}_r$ torna ad assumere valori imposti dalla condizione di non slittamento.

Scenario 3- traiettoria curvilinea a velocità costante

Nel terzo scenario di simulazione applichiamo al motoveicolo una coppia di sterzo τ imposta da un pilota virtuale. La velocità iniziale è la stessa degli scenari precedenti, ma

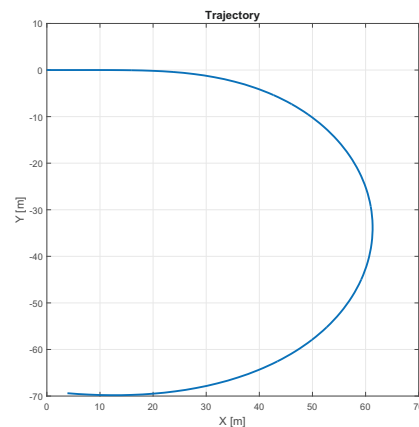


Figura 4.3. La traiettoria curvilinea percorsa dal motoveicolo a velocità costante.

in questo caso il motoveicolo affronta una curva a velocità costante. La coppia di sterzo mostrata in figura 4.4 impone al mezzo la traiettoria curvilinea descritta in figura 4.3. Inoltre in figura 4.4 sono mostrati gli andamenti corrispondenti dell'angolo di rollio ϕ , dell'angolo di sterzo δ e le velocità angolari di rollio e sterzo. In figura 4.5 sono mostrati gli andamenti delle forze che si generano durante la curva. In questo scenario il motoveicolo percorre la curva senza slittamenti.

Scenario 4- fenomeno del serpeggiamento

Si consideri il comportamento di un veicolo in evoluzione libera (nessuna coppia applicata) che percorre una curva con velocità iniziale di 5.5 m/s. Data la bassa velocità

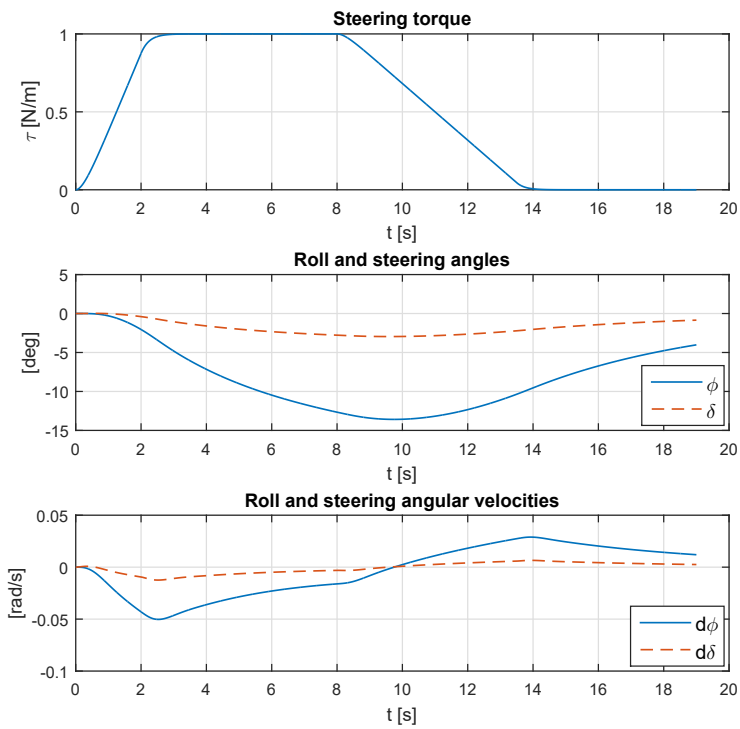


Figura 4.4. Rappresentazione della coppia di sterzo, degli angoli di rollio e di sterzo con le relative velocità del motoveicolo durante la curva percorsa.

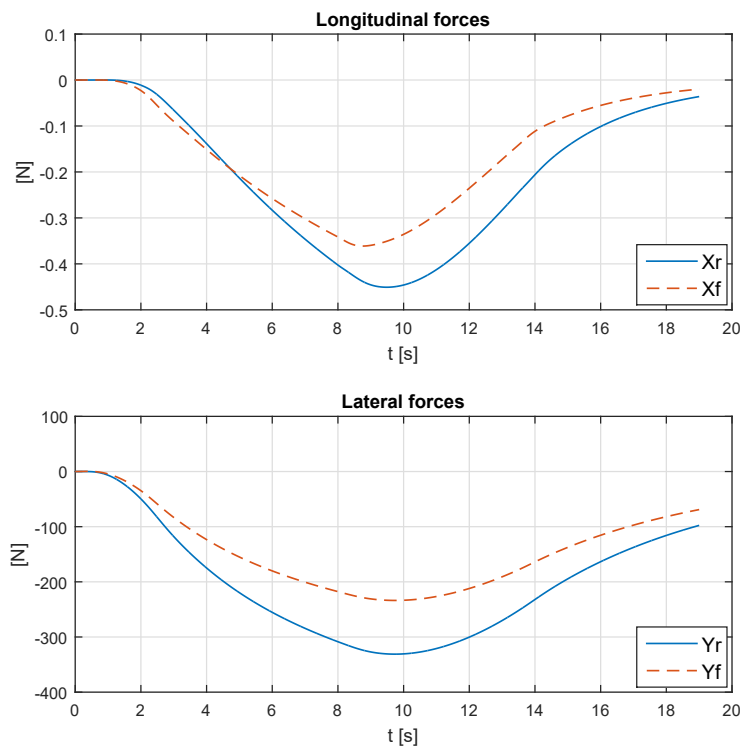
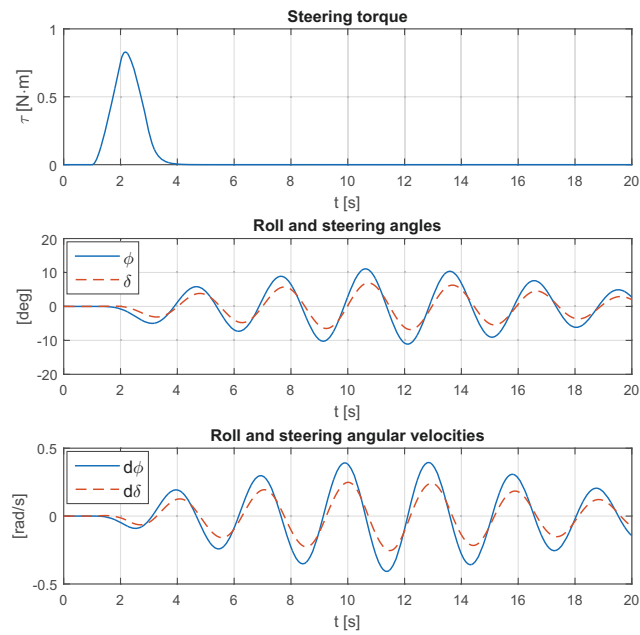
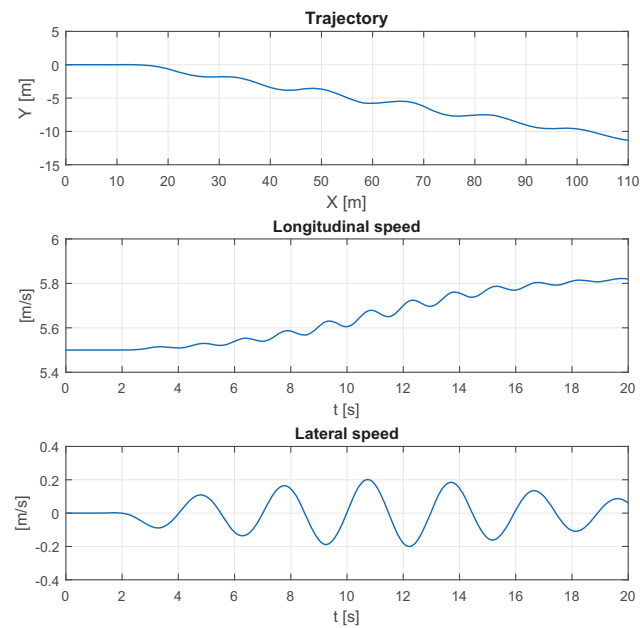


Figura 4.5. Rappresentazione delle forze che si generano durante il percorso curvilineo.



(a) Rappresentazione della coppia di disturbo che innesca il moto di serpeggiamento; angoli di rollio, di sterzo e relative velocità che si generano durante il moto.



(b) Rappresentazione della traiettoria percorsa dal motoveicolo durante il moto di serpeggiamento.

Figura 4.6. Simulazione del moto di serpeggiamento (weave).

di marcia del motoveicolo possiamo considerare valida la condizione di aderenza per entrambe le ruote. Come mostrato in figura 2.12(a), la velocità di 5.5 m/s è al di sotto del

limite di stabilità del modo weave, che instaura il tipico movimento di serpeggiamento del motoveicolo. Riferendosi alle figure 4.6(a) e 4.6(b) dopo un secondo è applicato un impulso di coppia τ allo sterzo che instaura moti di oscillazione degli angoli di rollio ϕ , di sterzo δ e della velocità laterale \dot{y}_1 . In figura 4.6(b) si nota che il valore della velocità longitudinale tende ad aumentare seppur con delle oscillazioni e raggiunge un valore quasi costante a fine simulazione. Questo comportamento si attribuisce alla dipendenza della velocità longitudinale dai parametri cinematici \dot{y}_1 , $\dot{\phi}$ e $\dot{\delta}$. L'ampiezza delle oscillazioni della dinamica di rollio e della velocità laterale tendono a decrescere nel tempo conferendo al veicolo un moto stabile.

Scenario 5- traiettoria rettilinea in condizione di slittamento in frenata

In questo scenario si simula il motociclo in moto rettilineo e in condizioni di scivolamento longitudinale dovute all'effetto di una coppia frenante applicata alla ruota posteriore. La velocità iniziale è di 144 km/h, la ruota anteriore è ipotizzata in condizioni di aderenza. Come mostrato in figura 4.7 al tempo $t = 2$ secondi è applicata una brusca coppia frenante.

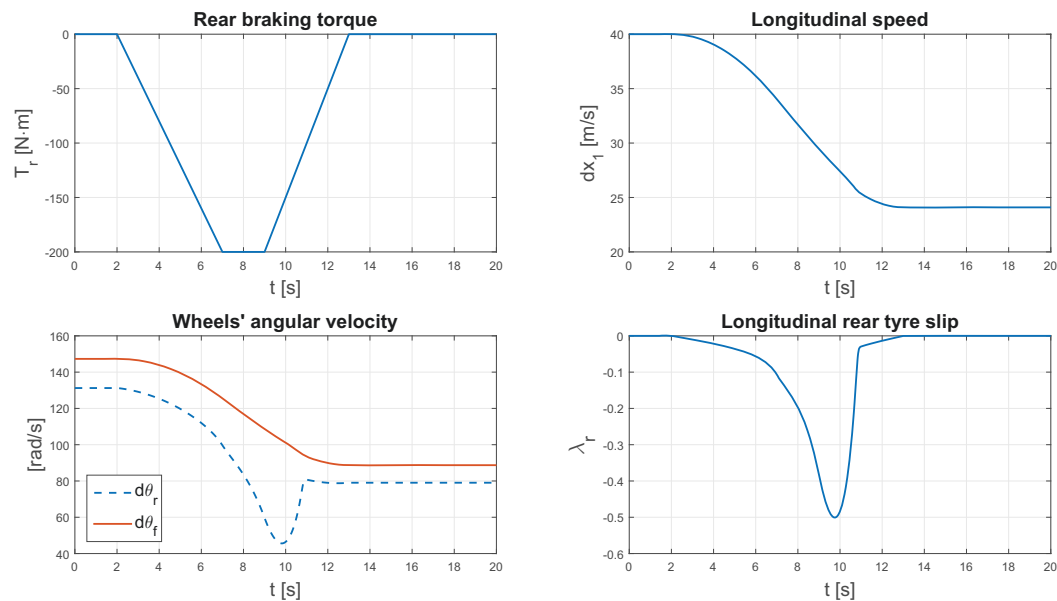


Figura 4.7. Simulazione di scivolamento durante una brusca frenata.

Nella stessa figura sono mostrati gli andamenti della velocità di marcia longitudinale del veicolo e le velocità angolari della ruota anteriore e posteriore $\dot{\theta}_f$ e $\dot{\theta}_r$. Si nota che nell'intervallo temporale 2 – 6.5 secondi, cioè durante il tratto lineare della coppia frenante, lo slittamento della ruota posteriore cresce di conseguenza. In questo contesto quindi, le velocità angolari $\dot{\theta}_f$ e $\dot{\theta}_r$ decrescono con andamento pressoché simile. Dopo circa 7 secondi la velocità angolare $\dot{\theta}_r$ inizia a decrescere in maniera più accentuata rispetto alla velocità della ruota anteriore in quanto quella posteriore inizia a perdere aderenza. Nell'intervallo

7 – 9 secondi la coppia frenante raggiunge il suo massimo valore e rimane costante, la velocità angolare $\dot{\theta}_r$ continua a decrescere in modo significativo in accordo con l'aumento dello slittamento. In corrispondenza del tempo $t = 9$ secondi la coppia frenante cessa e comincia a decrescere linearmente. Dopo $t = 9.9$ secondi $\dot{\theta}_r$ inizia a crescere di nuovo quando la ruota posteriore riprende trazione riacquistando velocemente il massimo grip, cioè tornando in condizione di completa aderenza.

4.3 Influenza dell'angolo di rollio sul modello

Le simulazioni descritte nei 5 scenari precedenti hanno considerato il motoveicolo che marcia in assetto verticale o in curva. Il modello simulato era rappresentato dalla versione linearizzata intorno alla posizione verticale sia rispetto all'angolo di rollio ϕ che dell'angolo di sterzo δ . Quando la motocicletta percorre una curva, la linearizzazione dell'angolo di rollio rispetto alla posizione verticale potrebbe risultare una semplificazione eccessiva. Nel presente paragrafo verrà effettuato un confronto tra il modello proposto e lo stesso modello in cui è stata rimossa la linearizzazione dell'angolo di rollio ϕ .

4.3.1 Effetti dell'angolo di rollio in curva

Nella maggioranza dei casi pratici, quando una moto percorre una curva, il pilota per mantenere la traiettoria, corregge lo sterzo δ di pochi gradi. Pertanto l'ipotesi di piccole variazioni dell'angolo di sterzo δ intorno al punto di equilibrio $\delta = 0$ rimane valida nella maggior parte delle situazioni pratiche. Si ritiene pertanto che la linearizzazione del modello rispetto a questa variabile non rappresenta una limitazione importante rispetto al modello non lineare.

Diversamente, quando un motoveicolo percorre una curva, l'angolo di rollio ϕ può assumere valori anche superiori a 15° che sono valori al di fuori del campo di linearità, per tale motivo si è ritenuto utile confrontare la performance del modello linearizzato rispetto a δ e ϕ con lo stesso modello in cui non è stata eseguita la linearizzazione rispetto all'angolo di rollio ϕ .

Simulazioni con differenti dinamiche di rollio

In tale paragrafo si effettuerà il confronto tra due modelli: uno con dinamica di rollio linearizzata e lo stesso modello con dinamica di rollio non linearizzata. La condizione iniziale di simulazione prevede che entrambi i motoveicoli percorrino una traiettoria rettilinea ad una velocità iniziale di 30 km/h. All'istante $t = 0$ è applicata una coppia di sterzo τ rappresentata in figura 4.8, la cui funzione è quella di forzare il motoveicolo a percorrere una traiettoria curvilinea innescando una dinamica di rollio (piega) sufficientemente rilevante.

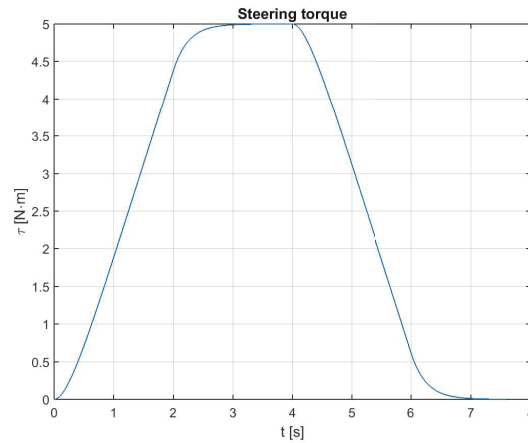
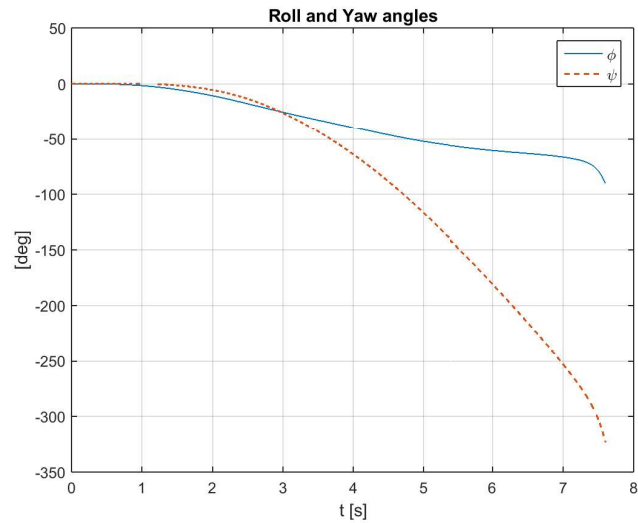


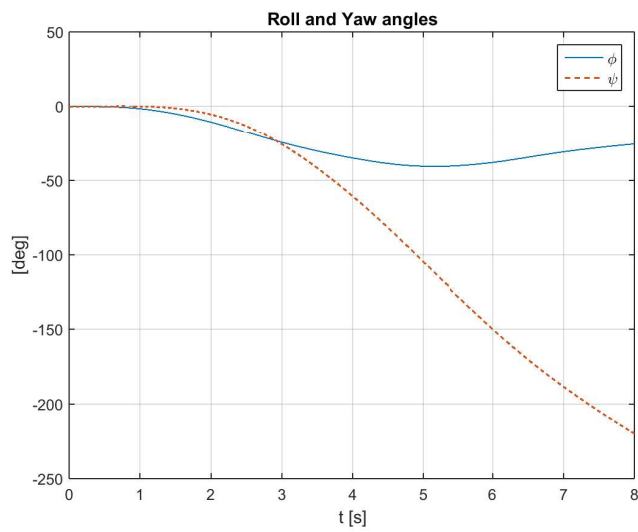
Figura 4.8. Coppia di sterzo che porta il motoveicolo in piega.

In figura 4.9(a) e 4.9(b) sono mostrati gli andamenti dell'angolo di rollio ϕ e di imbardata ψ rispettivamente ottenuti con dinamica di rollio linearizzata e con dinamica di rollio non linearizzata. Dal confronto dei due grafici si nota come il modello non lineare è in grado di catturare in maniera più esauriente la dinamica del veicolo in curva. In questo caso, infatti, l'angolo di rollio ϕ aumenta negli istanti iniziali di simulazione in cui la moto assume una configurazione di piega dovuta alla coppia di sterzo τ e raggiunge un massimo di circa -40° per poi riacquistare un certo assetto dopo che la coppia τ si annulla. Questo recupero di assetto conduce il veicolo ad assumere un angolo di rollio finale pari a 25° a fine simulazione. Al contrario, il modello linearizzato non è in grado di catturare completamente questa dinamica, ma si può osservare che per angoli di rollio ϕ minori di $30/35^\circ$ le dinamiche di rollio e imbardata sono molto simili a quelle ottenute con dinamica di rollio non lineare. Per angoli di rollio maggiori di 35° le due dinamiche divergono in maniera evidente, in particolare nel caso lineare la moto continua la fase di piega sino alla caduta che avviene prima del tempo massimo di simulazione raggiungendo l'angolo critico di rollio pari a -90° nell'intorno di 7.5 secondi. In figura 4.10(a) è mostrata la traiettoria del veicolo nel caso del modello lineare e in 4.10(b) quella del caso non lineare. In figura 4.11(a) sono riportati gli andamenti delle forze di contatto alla gomma anteriore e alla gomma posteriore nel caso linearizzato. La 4.11(b) descrive gli andamenti di queste forze nel caso non lineare. In relazione ai risultati ottenuti in figura 4.11(b) per il modello non lineare, si nota che le forze sono in accordo con la dinamica di rollio associata. Infatti, entrambe valgono zero quando la moto è in posizione verticale ($\phi = 0$), aumentano in modulo durante la fase di piega in cui l'angolo di rollio aumenta, raggiungono il valore massimo in corrispondenza di ϕ massimo intorno al tempo $t = 5$ secondi per poi diminuire quando ϕ torna a diminuire.

Come era prevedibile, questi risultati mostrano che la dinamica del motociclo in curva ed in assenza di slittamenti, descritta dal modello non linearizzato rispetto a ϕ , è sicuramente

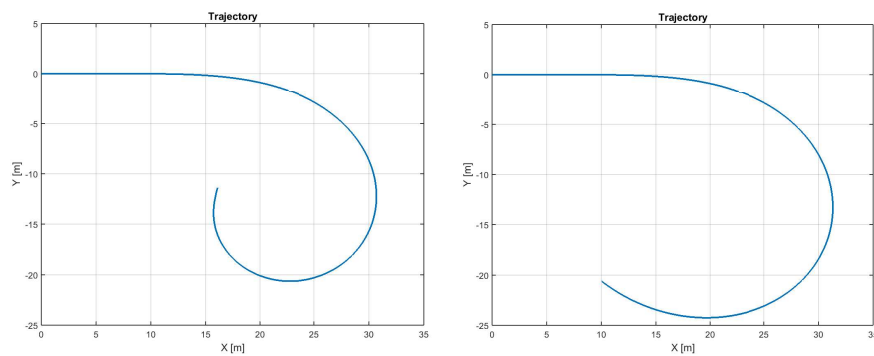


(a) Angoli di rollio e imbardata - dinamica di rollio linearizzata.



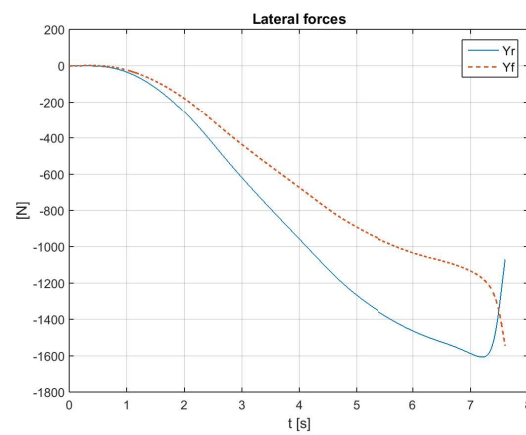
(b) Angoli di rollio e imbardata - dinamica di rollio non lineare.

Figura 4.9. Confronto delle dinamiche di rollio e imbardata per il modello linearizzato e non linearizzato.

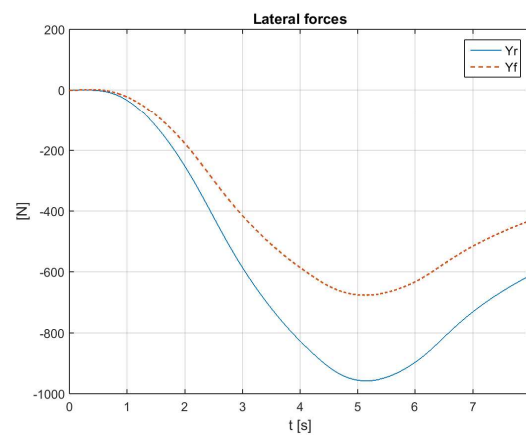


(a) Traiettoria - dinamica di rollio linearizzata. (b) Traiettoria - dinamica di rollio non lineare.

Figura 4.10. Confronto delle traiettorie percorse.



(a) Rappresentazione delle forze laterali nel modello lineare.



(b) Rappresentazione delle forze laterali nel modello non lineare.

Figura 4.11. Confronto delle forze laterali.

più esaustiva e completa rispetto a quella ottenuta con il modello linearizzato rispetto ad entrambi gli angoli. D'altra parte, l'aspetto interessante ai fini del controllo di stabilità è che il modello con rollio linearizzato è sufficientemente accurato nel descrivere questa dinamica per un ampio range di valori dell'angolo di rollio, precisamente $0 - 35^\circ$.

4.4 Validazione del modello in situazione di caduta

Dopo aver validato la bontà del modello a trazione posteriore per angoli di rollio che raggiungono valori di $30 - 35^\circ$, si è passati a simulare lo stesso modello in situazioni dinamiche più complesse, cioè quelle che riguardano le situazioni critiche di caduta del veicolo.

4.4.1 Situazioni tipiche di caduta

In letteratura tra le cadute più pericolose vengono indicate il lowside e l'highside che generano effetti su motoveicolo e pilota del tipo mostrate nelle figure 4.12(a) e 4.12(b). La caduta in lowside si verifica quando una brusca accelerazione o frenata provoca una



(a) Caduta in lowside.



(b) Caduta in highside.

Figura 4.12. Fenomeni di cadute lowside e highside.

perdita d'aderenza da parte della ruota posteriore verso l'esterno della curva, trascinando il motociclo e quindi il pilota a cadere su un lato. Anche il fenomeno dell'highside interessa un motoveicolo in curva in condizioni di eccessiva frenata o in uscita di curva in condizioni di eccessiva accelerazione. Entrambi i casi generalmente sono innescati da una situazione di panico da parte di un pilota. Nel primo caso il pilota che si accinge ad affrontare una curva a velocità sostenuta comincia a frenare bruscamente provocando una condizione di slittamento laterale della gomma posteriore. In questo frangente tenta di recuperare assetto e traiettoria controsterzando e soprattutto rilasciando bruscamente il freno. A questo punto la ruota posteriore esce dalla condizione di slittamento laterale riacquistando bruscamente aderenza con conseguente eccitazione di un violento impulso della forza di attrito laterale alla gomma posteriore non bilanciato in grado di riportare violentemente il veicolo in posizione verticale, a volte ribaltandolo. In questo frangente il pilota può essere sbalzato via violentemente dalla sella.

Il secondo caso di highside si verifica tipicamente in uscita di curva in condizioni di eccessiva accelerazione. Questa accelerazione provoca uno scivolamento laterale della gomma posteriore e nel tentativo di limitare questo effetto e recuperare assetto, il pilota rilascia bruscamente l'acceleratore provocando una brusca ripresa di grip della gomma posteriore che eccita un violento impulso della forza di contatto laterale sulla gomma con tutte le conseguenze già descritte nel primo caso. Nel seguito si descriveranno le simulazioni ottenute che hanno permesso di riprodurre e quindi di analizzare le cadute di lowside e highside appena descritte.

Simulazione di highside generato da una brusca frenata

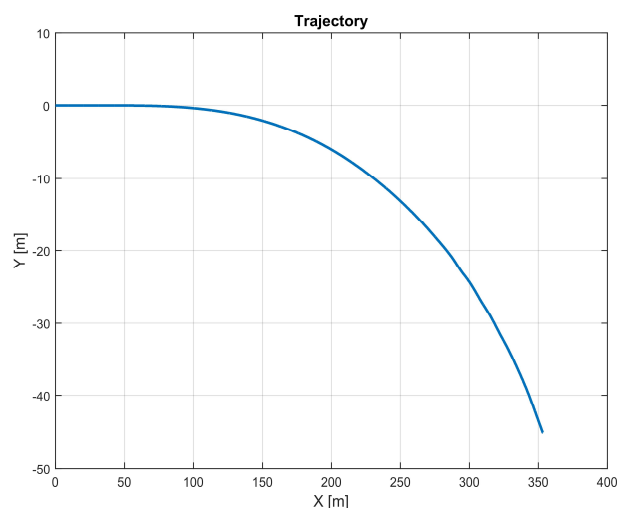


Figura 4.13. La curva in fase di frenata durante l'highside.

Di seguito descriviamo la simulazione di un motoveicolo in highside nel caso di eccessiva frenata in curva. La dinamica di un veicolo in questa situazione critica è abbastanza complessa. Si consideri un motoveicolo che alla velocità di 160 km/h sta per affrontare una curva. In figura 4.13 è rappresentata la traiettoria ottenuta applicando un impulso di coppia di sterzo di 1.5° che porta il veicolo in piega per affrontare la curva. L'azione di

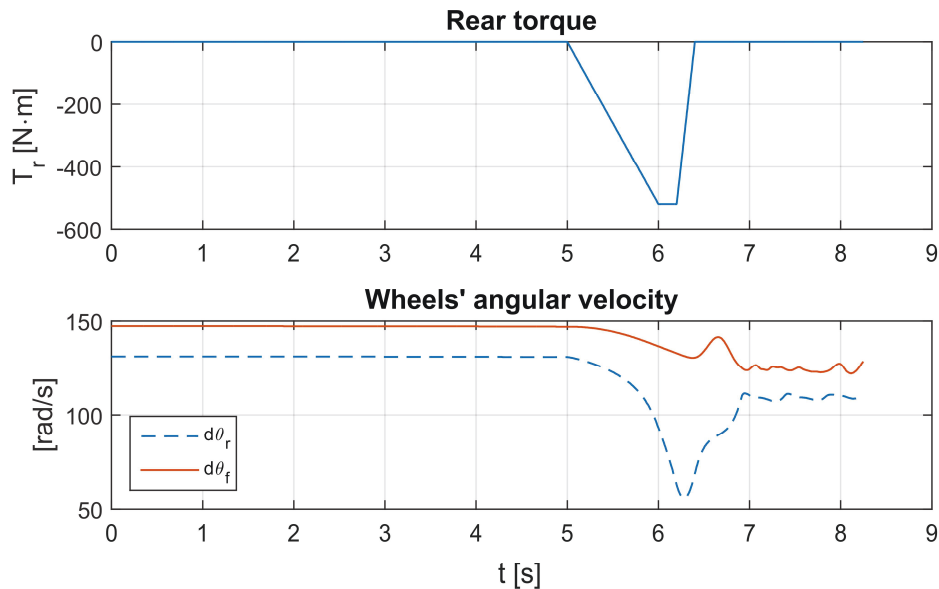


Figura 4.14. Highside in frenata: gli andamenti dell'azione di frenata e le velocità angolari delle ruote.

frenata del pilota virtuale è simulata con una coppia negativa alla ruota posteriore il cui andamento è mostrato in figura 4.14. Sempre in figura 4.14 sono rappresentati gli andamenti delle velocità angolari alle ruote anteriore $\dot{\theta}_f$ e posteriore $\dot{\theta}_r$, mentre in figura 4.15 sono rappresentati gli andamenti della coppia di sterzo, gli angoli di rollio ϕ e imbardata ψ e le forze che si generano tra il pneumatico e la strada.

Nella finestra temporale 0 – 5 secondi, cioè prima dell'istante di applicazione della coppia di frenata, il veicolo percorre la curva in una situazione di equilibrio, cioè non ci sono slittamenti. Al tempo $t = 5$ secondi il pilota virtuale frena bruscamente. Questa situazione è simulata con una coppia negativa applicata fino al tempo $t = 6$ secondi. In accordo con questa coppia, il modulo della forza longitudinale X_r , anche detta forza frenante, cresce e le velocità angolari delle ruote, $\dot{\theta}_f$ e $\dot{\theta}_r$, iniziano a decrescere. Quando la coppia frenante si avvicina al suo valore massimo, la velocità angolare $\dot{\theta}_r$ della ruota posteriore diminuisce più drasticamente rispetto a $\dot{\theta}_f$, ciò significa che la ruota posteriore sta perdendo aderenza.

Al tempo $t = 6.2$ secondi il pilota virtuale rilascia il freno bruscamente nel tentativo di recuperare assetto quindi la coppia decresce bruscamente, la forza frenante alla ruota posteriore diminuisce in modulo e la forza laterale Y_r cresce. In questo frangente la ruota

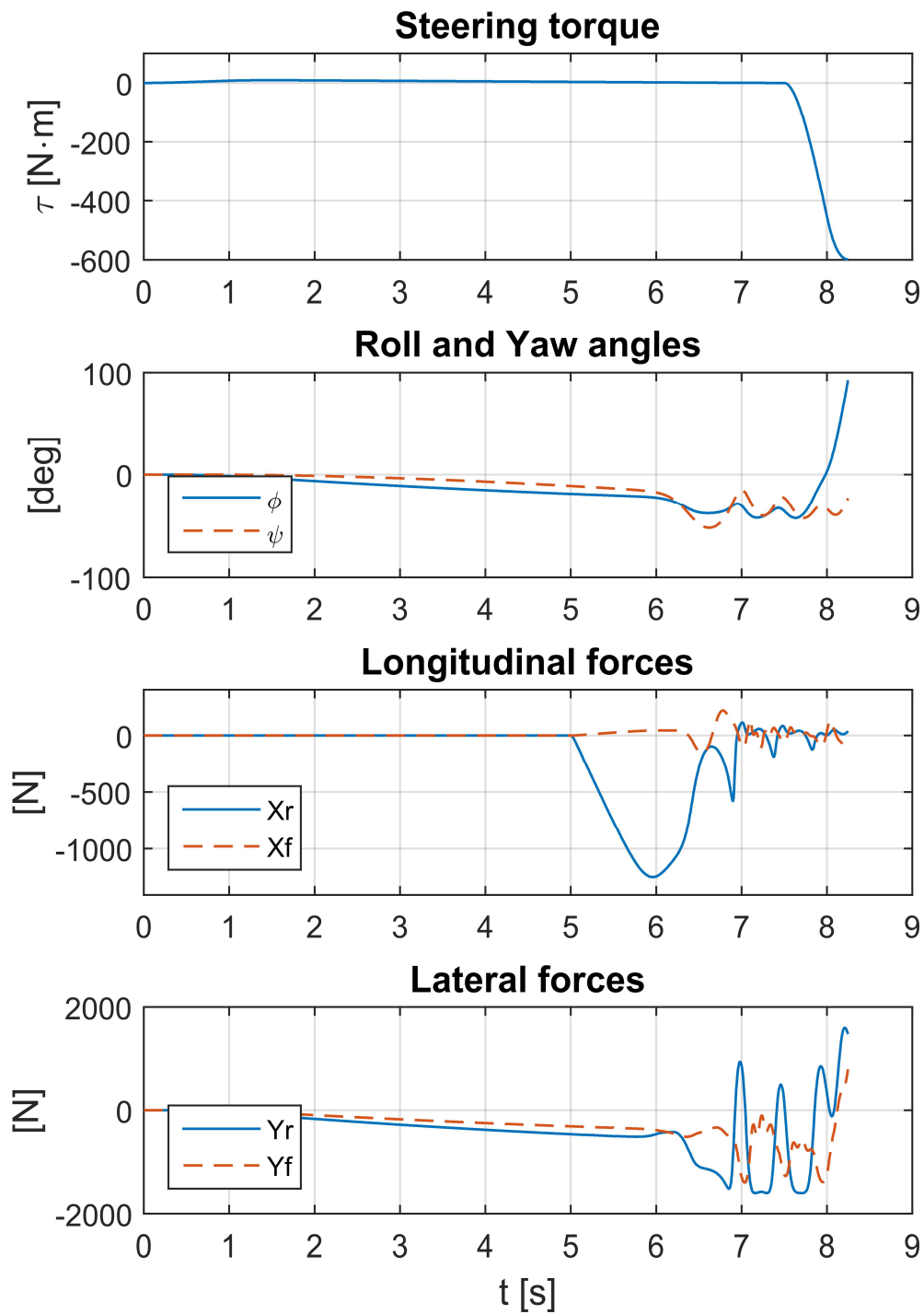


Figura 4.15. Highside in frenata: la coppia di sterzo, gli angoli di rollio e di imbardata, le forze.

posteriore riguadagna grip e $\dot{\theta}_r$ comincia a crescere di nuovo. Si nota che a partire dal tempo $t = 6.8$ secondi è eccitato un moto di weaving del veicolo che si identifica con delle oscillazioni dell'angolo di rollio e di imbardata provocate da una serie di impulsi della forza laterale Y_r . Il picco di forza laterale si verifica ogni volta che la ruota posteriore recupera bruscamente aderenza ed in corrispondenza di questi picchi sussiste il pericolo per il pilota di essere sbalzato in aria. Notiamo infine che il pilota virtuale al tempo $t = 7.5$ secondi sta tentando di recuperare il controllo del veicolo agendo sullo sterzo provocando tuttavia la caduta.

Simulazione di highside in uscita di curva in accelerazione

In questo scenario si valuta il fenomeno dell'highside nel caso di eccessiva accelerazione in uscita di curva. La traiettoria iniziale seguita dal veicolo è quella che è già stata introdotta in figura 4.13 e la velocità di ingresso è pari a 160 km/h. In uscita di curva, nell'intervallo

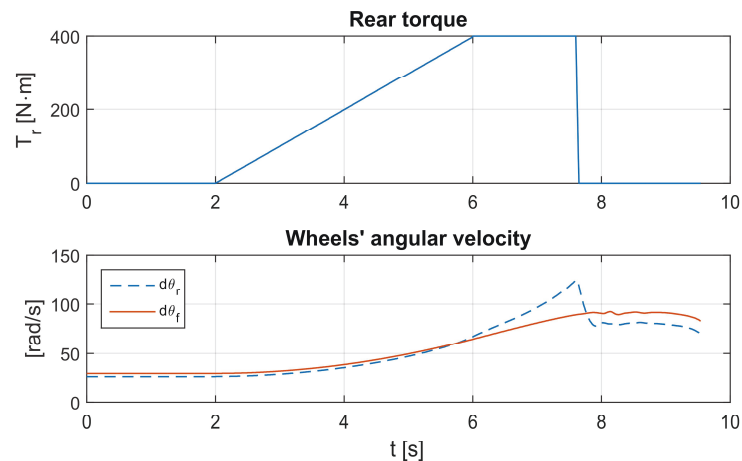


Figura 4.16. Highside in accelerazione: la coppia applicata e le velocità angolari delle ruote.

temporale 2 – 6 secondi il pilota virtuale accelera, quindi applichiamo una coppia di trazione alla ruota posteriore linearmente crescente, come mostrato in figura 4.16. Sempre in figura 4.16 si nota che al tempo $t = 6$ secondi, quando la coppia di trazione raggiunge valore massimo, la ruota posteriore inizia a slittare. Questo slittamento si traduce in un aumento più marcato di $\dot{\theta}_r$ rispetto a quello di $\dot{\theta}_f$. Il pilota tenta di correggere questa deriva laterale controsterzando e rilasciando bruscamente l'acceleratore al tempo $t = 7.5$ secondi. In figura 4.17 è mostrato l'andamento della coppia negativa di sterzo che rappresenta la controsterzata del pilota. Al tempo $t = 7.5$ secondi la ruota posteriore comincia a recuperare trazione e la sua velocità diminuisce. Intorno a $t = 8$ secondi la gomma posteriore è in completa aderenza, viene quindi generato un impulso di forza laterale non bilanciato che tende a raddrizzare la moto bruscamente, difatti l'angolo di rollio torna a diminuire.

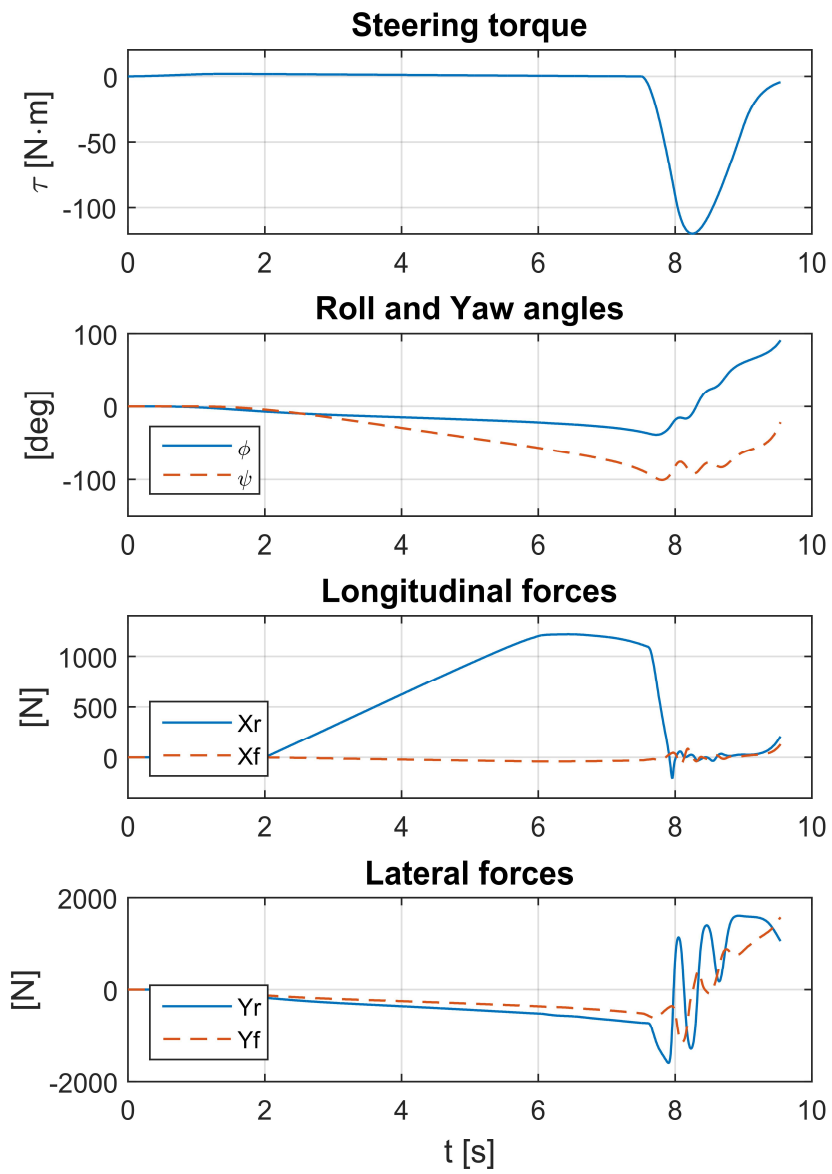


Figura 4.17. Highside in accelerazione: la controsterzata del pilota, gli angoli di rollio, di imbardata e le forze.

Simulazione del fenomeno di lowside in frenata

In questo paragrafo sarà descritto il fenomeno del lowside che può verificarsi quando il motoveicolo entra in curva con velocità eccessiva e il pilota frena bruscamente. La

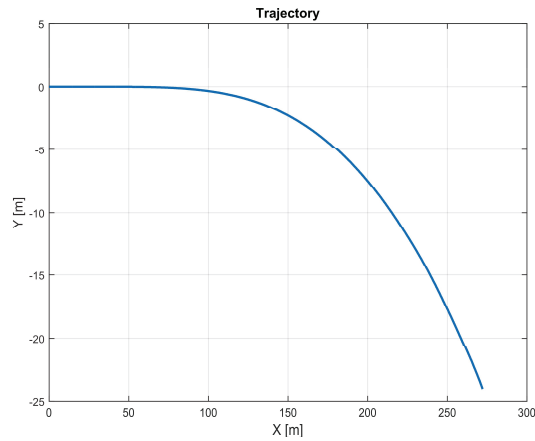


Figura 4.18. La curva in fase di frenata durante il lowside.

traiettoria iniziale seguita dal veicolo è quella mostrata in figura 4.18 e la velocità di ingresso

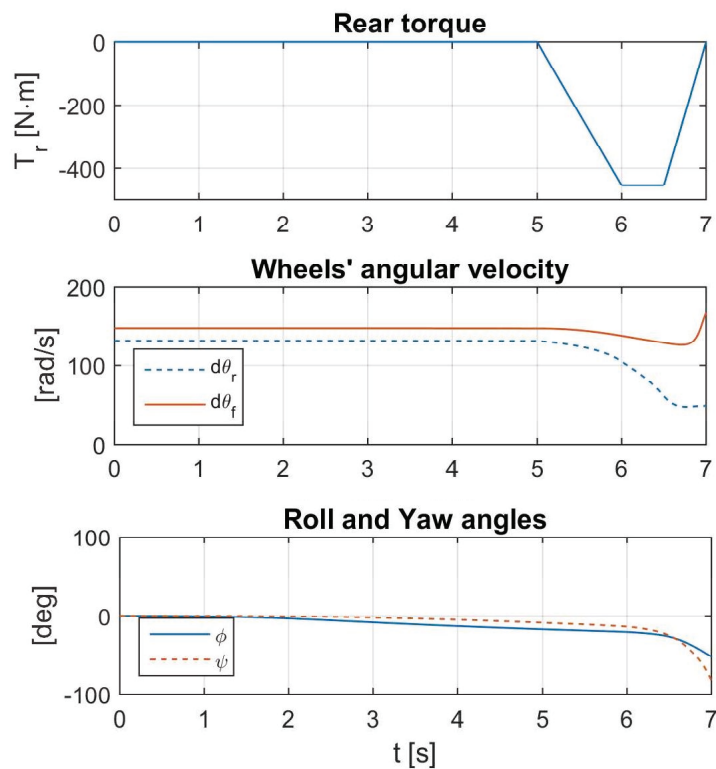


Figura 4.19. Lowside in frenata: coppia applicata, velocità angolari delle ruote, angoli di rollio e d'imbardata.

è pari a 160 km/h. Per le forze di contatto vale il modello utilizzato nel precedente scenario. In figura 4.19 si nota che al tempo $t = 5$ secondi il pilota frena bruscamente durante la fase di piega, applicando una coppia negativa alla ruota posteriore. Da questo istante temporale le velocità angolari delle ruote cominciano a decrescere. Quando la coppia si fa più elevata la ruota posteriore comincia a perdere aderenza longitudinale e la sua velocità angolare $\dot{\theta}_r$ comincia a decrescere più rapidamente rispetto a quella della ruota anteriore. In questi istanti, la forza laterale necessaria a mantenere in equilibrio il veicolo non è più sufficiente e il motoveicolo inizia a scivolare lateralmente. Sempre in figura 4.19, nell'intervallo temporale 6 – 7 secondi, nonostante il freno venga rilasciato dal pilota, si nota che anche gli angoli di rollio e imbardata crescono, a questo punto il motoveicolo cade a terra scivolando fuori pista.

4.5 Validazione del modello a doppia trazione

In questa sezione verrà validato e confrontato il modello nelle condizioni di trazione integrale. Esso è stato ottenuto attivando contemporaneamente entrambe le trazioni sulle ruote posteriore e anteriore. In particolare le simulazioni hanno riguardato un confronto tra il modello a singola trazione e quello a trazione integrale con diverse ripartizioni di coppia alle ruote e in situazione di sterzo libero. Inoltre tale modello è stato testato ulteriormente in diverse situazioni di moto evidenziando una maggiore stabilità in curva.

Simulazione con accelerazione in curva in condizioni di aderenza

Questa simulazione considera un motoveicolo che affronta una curva con velocità iniziale di 8 m/s. La coppia di sterzo utilizzata per impostare la traiettoria è quella mostrata in figura 4.20. Nella stessa figura è rappresentata anche la trazione generata dal motore il cui valore massimo non è tale da portare il veicolo in condizioni di slittamento. Si vuole indagare l'effetto della ripartizione di questa coppia tra ruota posteriore e anteriore. Si consideri che, ad esempio, una ripartizione 90r/10f indica che la coppia di trazione totale disponibile è ripartita al 90% sulla ruota posteriore (rear) e il 10% su quella anteriore (front). I risultati sostanziali della simulazione sono sommarizzati nei grafici di figura 4.21 e 4.22. Nel primo grafico si nota che rispetto al caso di veicolo a singola trazione (100r/0f), ripartendo la coppia tra ruota posteriore e anteriore con i rapporti indicati nello stesso grafico, si ottiene una stabilizzazione della dinamica di sterzo e questo effetto è tanto più evidente quanto più diminuiamo il rapporto di ripartizione. Un effetto conseguente della stabilizzazione dello sterzo è quello di allargare leggermente la traiettoria, come si vede in fig. 4.22.

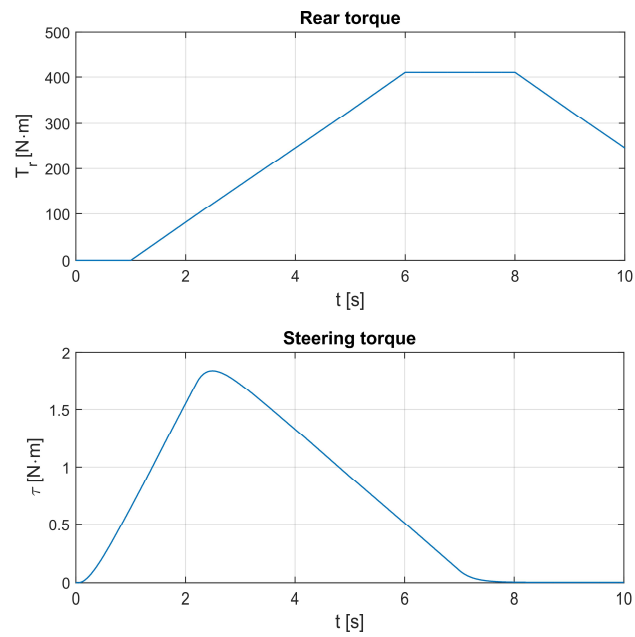


Figura 4.20. Ingressi.

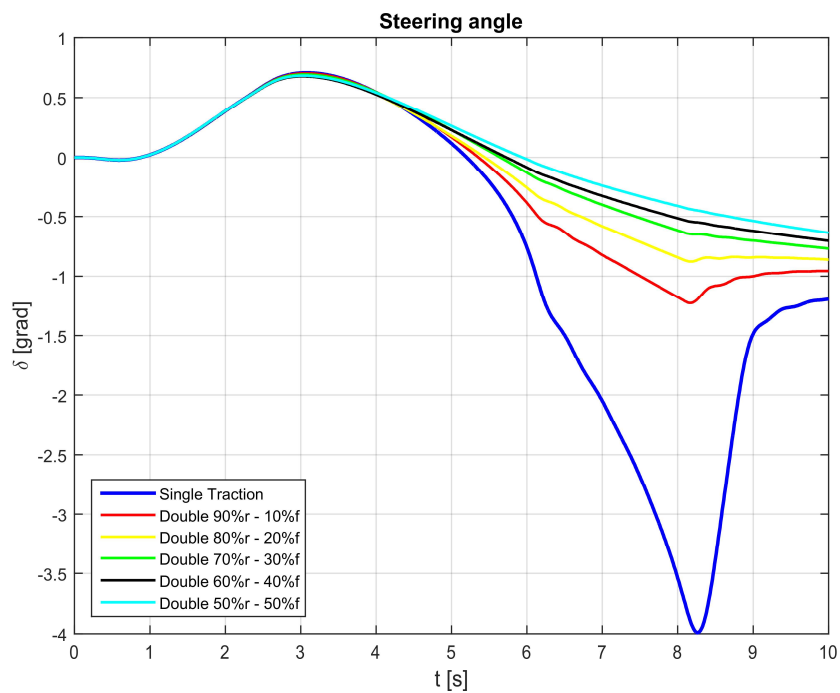


Figura 4.21. Angolo di sterzo al variare della ripartizione di trazione.

Simulazione con accelerazione in curva e slittamento della ruota posteriore

In questo paragrafo valutiamo il comportamento del motoveicolo a trazione integrale in accelerazione in uscita di curva al variare del rapporto di ripartizione della coppia di

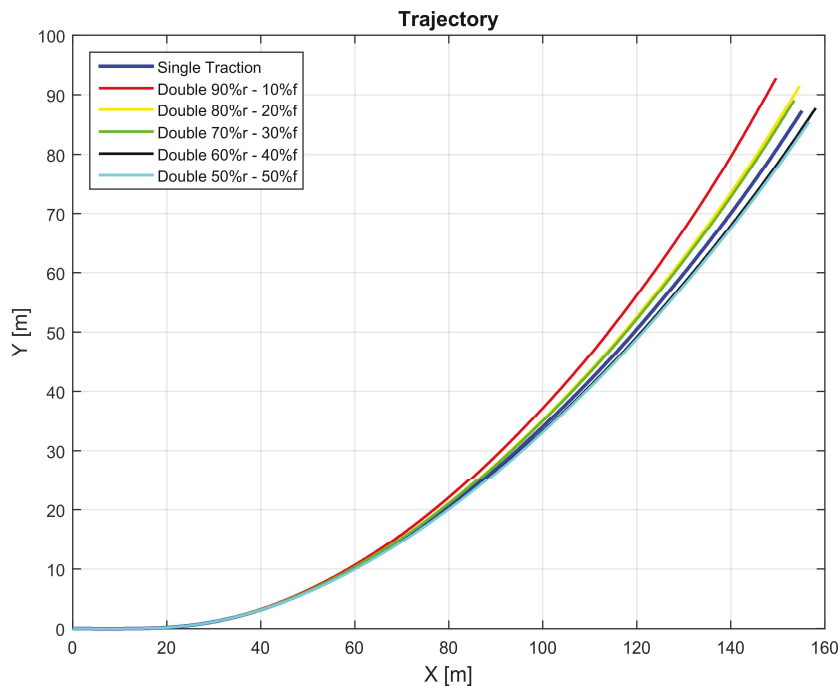


Figura 4.22. Traiettorie percorse al variare delle ripartizioni di trazione.

trazione tra ruota posteriore e anteriore e investigando le condizioni di slittamento della ruota posteriore. La velocità del veicolo in ingresso di curva è di 8 m/s (circa 30 Km/h). In figura 4.23 sono mostrati gli andamenti delle coppie di trazione necessarie per la generazione della condizione di slittamento della ruota posteriore nei differenti casi di ripartizione indicati in legenda.

Simulando il caso di sola trazione posteriore, cioè rapporto di ripartizione di coppia 100r/0f, si è ottenuto che il valore della coppia totale necessaria a portare in slittamento longitudinale la ruota posteriore deve essere pari a 405 N/m. In questo caso il motoveicolo slitta, ma non cade entro il tempo di simulazione. Occorre settare un valore di coppia pari a 410 N/m affinché possa essere generato uno slittamento posteriore. In aggiunta, questa condizione di slittamento trovata, provoca una instabilità del veicolo tale da provocarne la caduta.

Settando un rapporto di ripartizione della coppia di trazione al valore 90r/10f, la coppia necessaria per generare una perdita di aderenza alla ruota posteriore assume il valore di 460 N/m. In questo caso si innesta anche una dinamica di weaving (serpeggiamento), tuttavia non sufficientemente severa da far cadere la moto.

Settando la ripartizione a 80r/20f si osserva che il valore di coppia di trazione necessario a generare slittamento alla ruota posteriore sale a 520 N/m. Anche in queste condizioni la moto slitta ma si ristabilizza.

Con una ripartizione 70r/30r e con una coppia di 600 N/m, il veicolo comincia a slittare

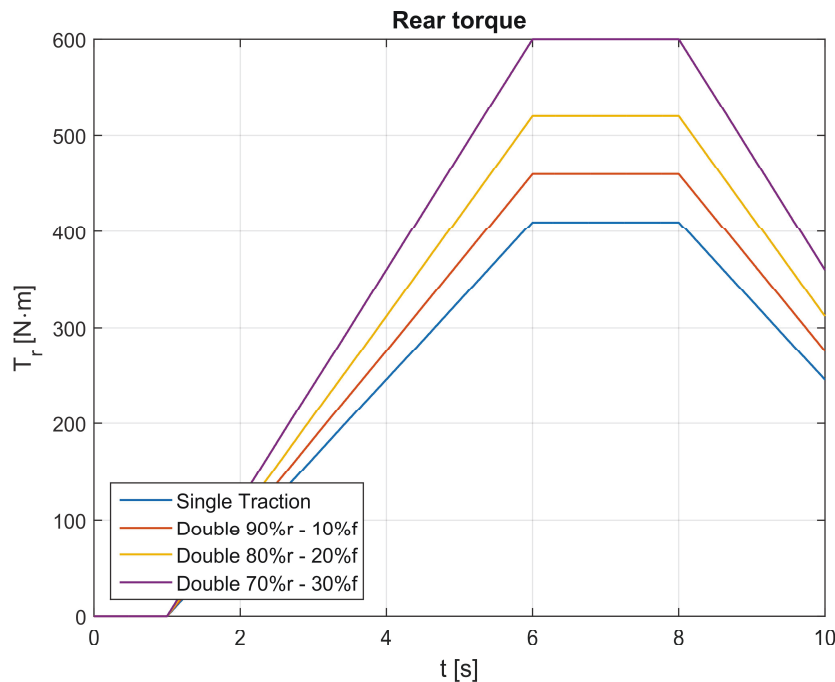


Figura 4.23. Coppie di trazione.

ma non cade. Il valore della velocità raggiunto dal veicolo a fine simulazione è di 50 m/s, circa 180 Km/h. Come ci si aspettava, questi risultati confermano che diminuendo il rapporto di ripartizione della coppia di trazione, la condizione di scivolamento della ruota posteriore è ottenuta in corrispondenza di valori di coppia di trazione crescenti. I grafici di figura 4.24 e 4.25 mostrano rispettivamente gli andamenti delle velocità angolari delle ruote anteriore e posteriore nei diversi casi di ripartizione. Confrontando gli andamenti delle velocità angolari del front e del rear nei singoli casi di ripartizione di trazione, si individua facilmente la condizione di slittamento della ruota posteriore rispetto a quella anteriore nei singoli casi. In riferimento al grafico dell'angolo di rollio di figura 4.26 si nota che nel caso di singola trazione quest'angolo raggiunge il valore di 90° a fine simulazione indicando la caduta del veicolo. Negli altri casi di ripartizione l'angolo di rollio aumenta (nel caso 70r/30f raggiunge anche un massimo) ma tende ad assumere un valore limitato a fine simulazione, indice di una certa stabilità della motocicletta. Discorso simile può essere fatto per l'angolo di imbardata di figura 4.27. Dal grafico dell'angolo di sterzo mostrato in figura 4.28 si osserva che nel caso di singola trazione esso assume valori sempre crescenti, soprattutto in corrispondenza della condizione di slittamento posteriore, fino alla caduta del veicolo. D'altra parte, le simulazioni con ripartizione di coppia rivelano invece che l'angolo di sterzo assume valori limitati in tutti i casi presi in considerazione e che minore è il rapporto di partizione, maggiore è la stabilità della dinamica del veicolo. Gli andamenti delle forze longitudinali alle ruote mostrate in figura 4.29 e 4.30 sono in

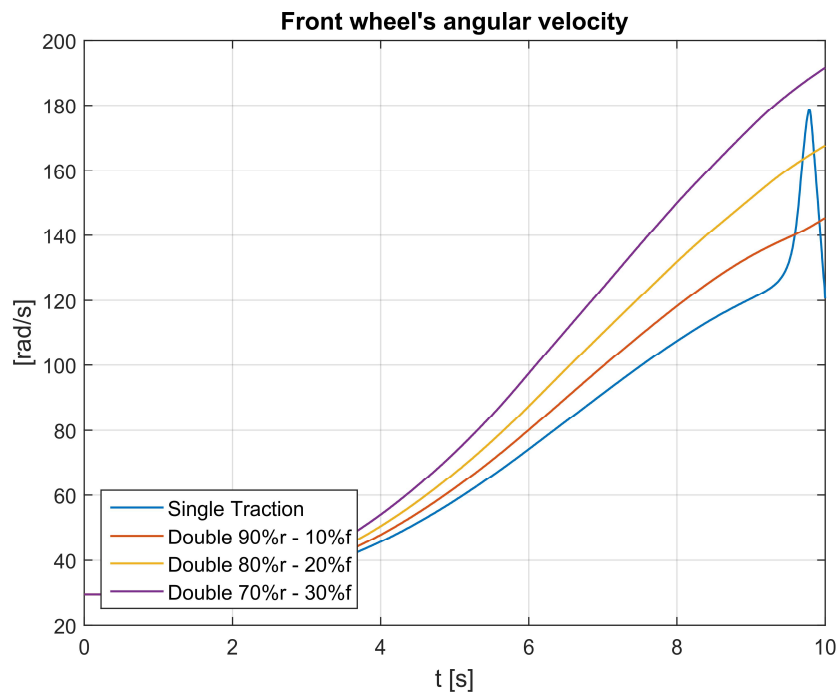


Figura 4.24. Velocità angolari al front.

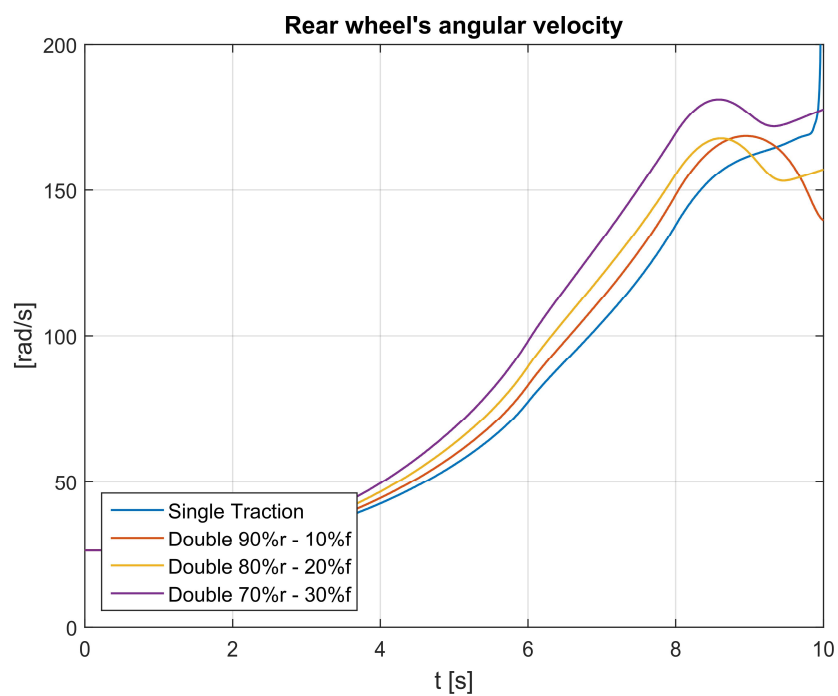


Figura 4.25. Velocità angolari al rear.

accordo con le osservazioni già fatte ed in particolare le forze che si generano sia sulla ruota anteriore che posteriore “seguono” la coppia di trazione nei tre casi di ripartizione di trazione.

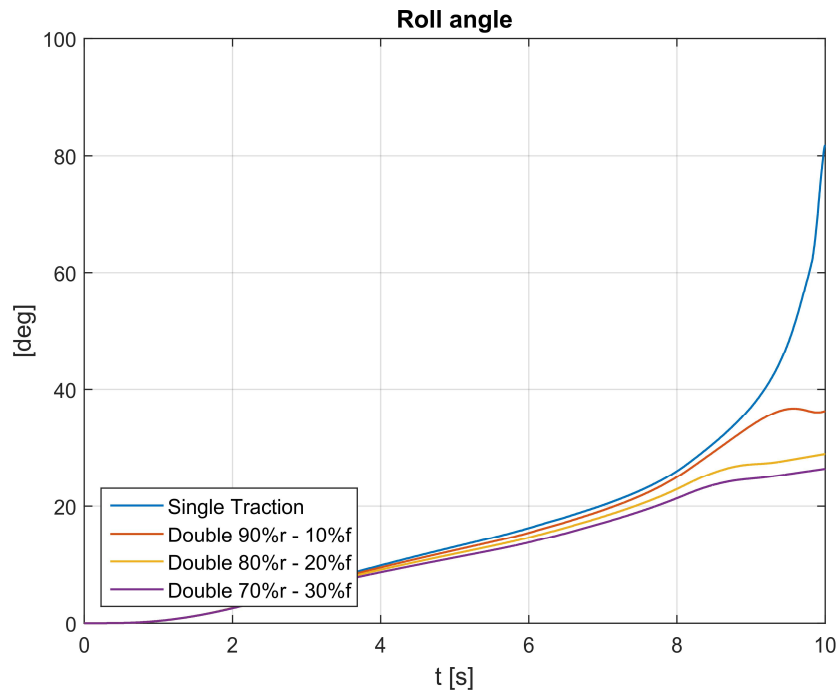


Figura 4.26. Angolo di rollio.

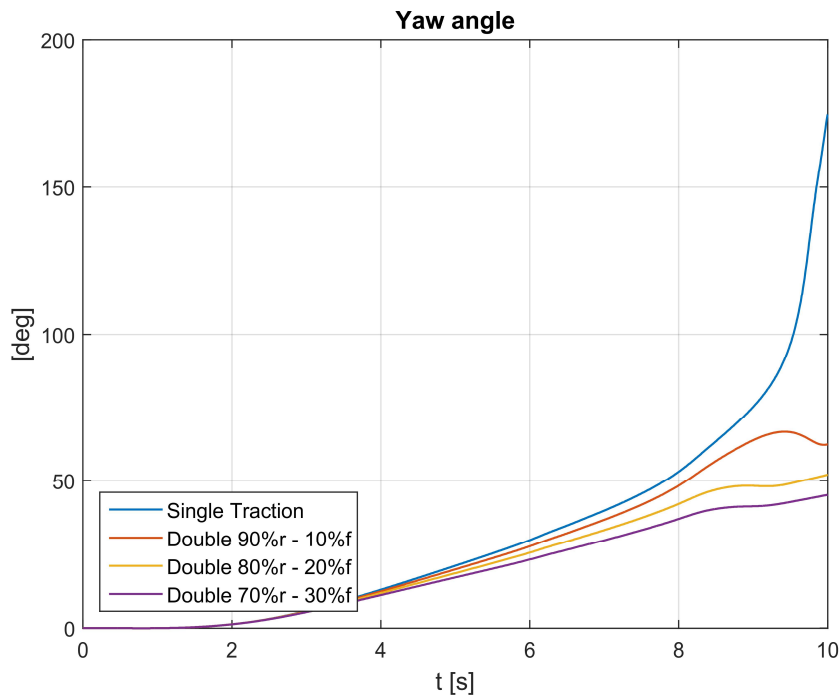


Figura 4.27. Angolo di imbardata.

Quest'ultima osservazione non può essere vera, ovviamente, nel caso di singola trazione per la forza longitudinale al front. Infine, dal grafico della velocità traslazionale del veicolo

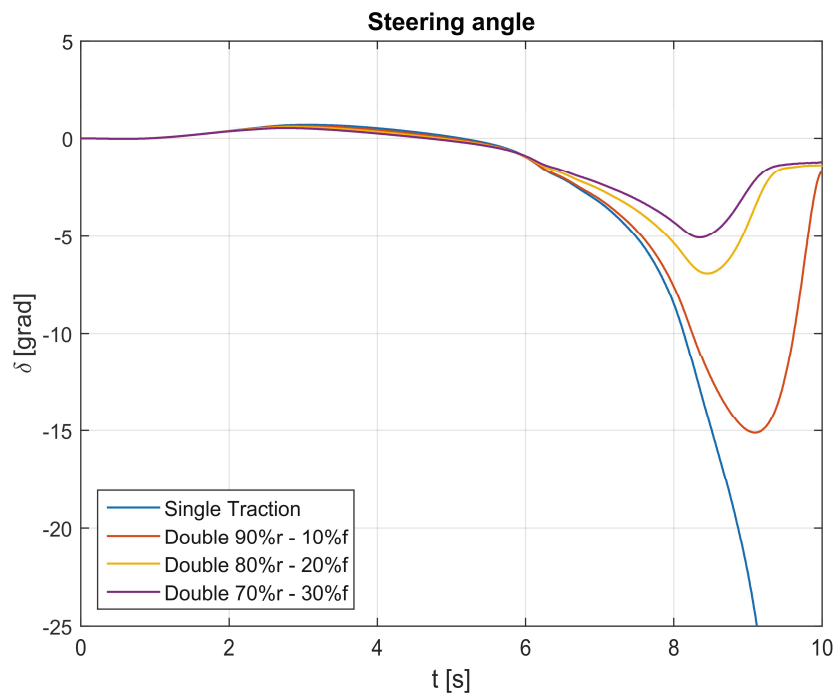


Figura 4.28. Angolo di sterzo.

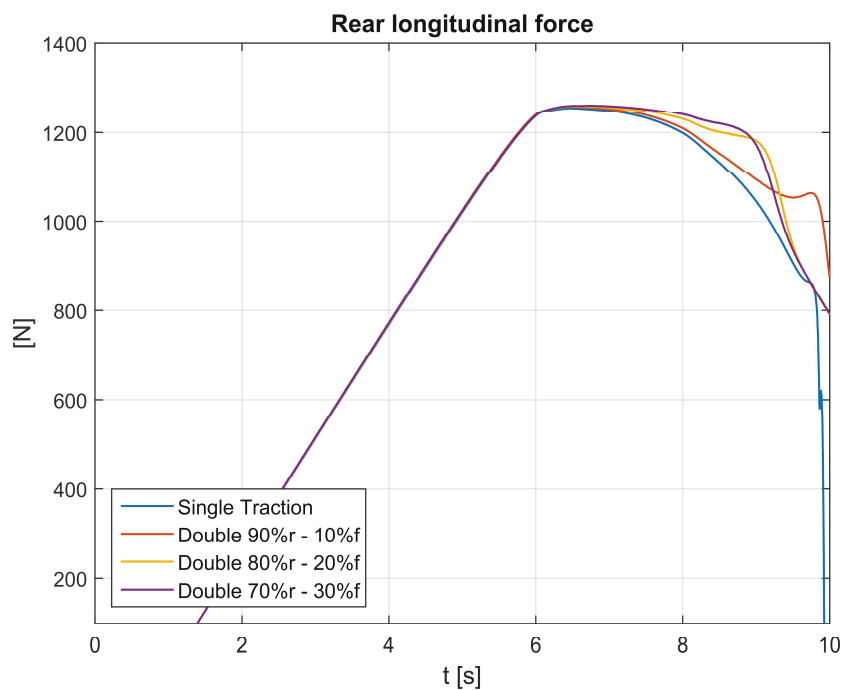


Figura 4.29. Forza di contatto longitudinale al rear.

mostrata in figura 4.31 si nota che minore è il rapporto di ripartizione, maggiore è la velocità raggiunta dal veicolo a fine simulazione in condizioni di slittamento. Questo comportamento

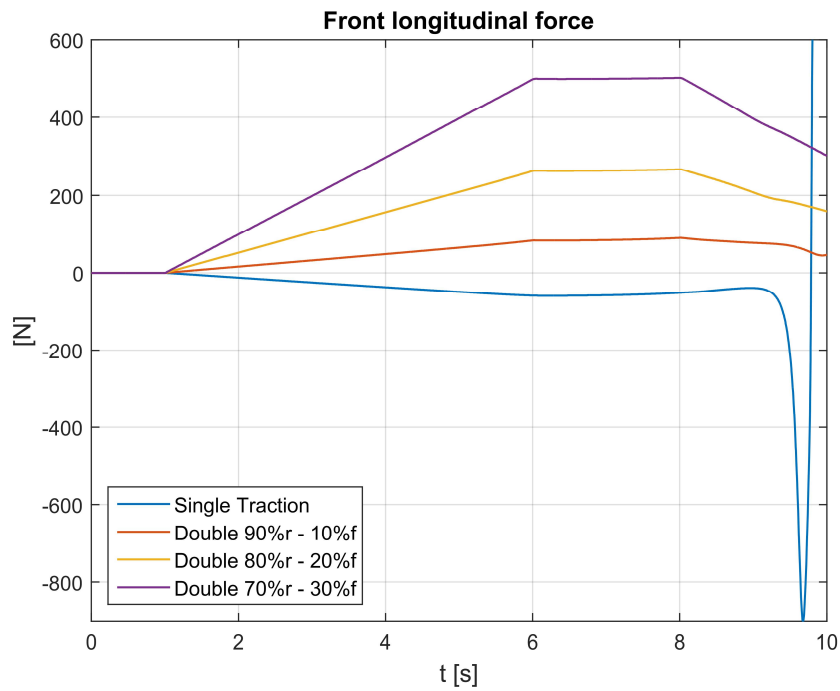


Figura 4.30. Forza di contatto longitudinale al front.

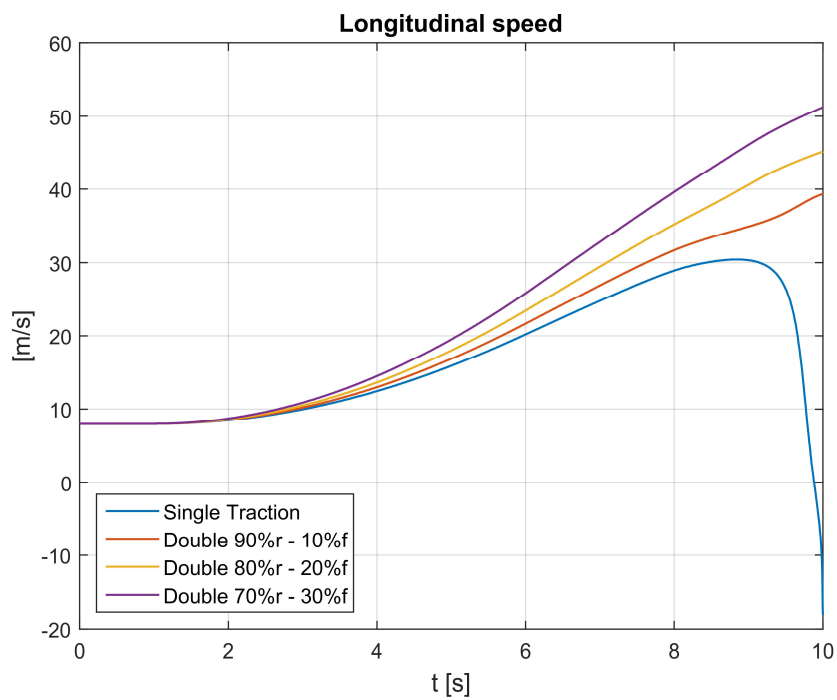


Figura 4.31. Velocità traslazionale.

è da attribuire alla maggiore stabilità del moto in condizioni di slittamento al posteriore garantita con la ripartizione della coppia di trazione tra ruota posteriore e anteriore.

Simulazione con frenata in curva in condizioni di slittamento della ruota posteriore

In questo paragrafo simuliamo il comportamento del veicolo a trazione integrale in curva ed in condizioni di frenata. Investighiamo quindi le condizioni di scivolamento della ruota posteriore in relazione al rapporto di ripartizione della coppia di frenata. La velocità iniziale del veicolo è di 30 m/s (108 km/h).

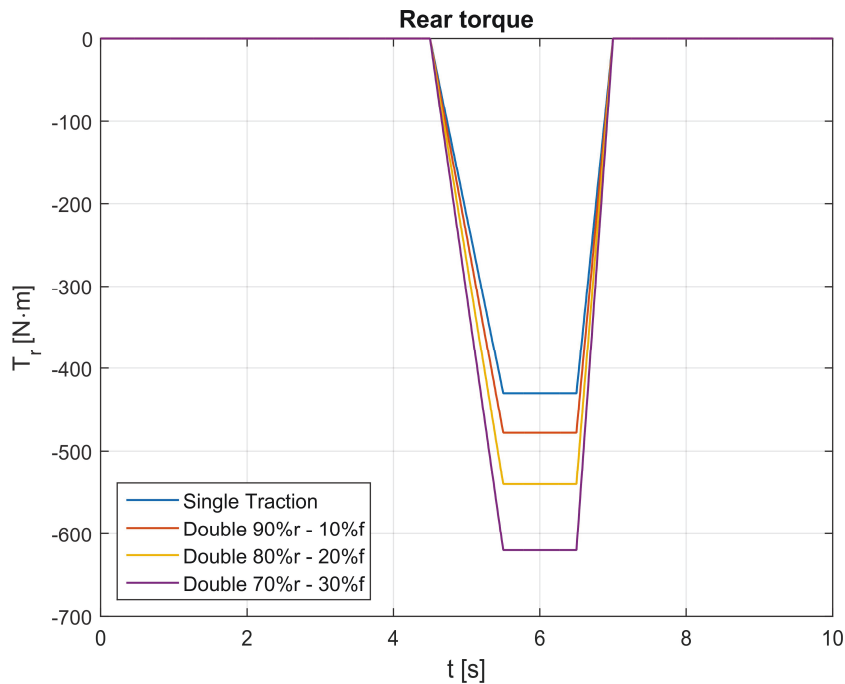


Figura 4.32. Coppie di trazione.

In figura 4.32 è mostrato l'andamento della coppia di frenata necessaria, in ogni caso di ripartizione per portare la ruota posteriore in condizioni di slittamento. Banalmente si osserva che minore è il rapporto di ripartizione, maggiore deve essere questa coppia. Dai grafici di figura 4.33 e 4.34 si osserva che quando la ruota posteriore entra in condizioni di slittamento la sua velocità angolare aumenta notevolmente rispetto a quella della ruota anteriore. Il grafico di figura 4.35 descrive l'andamento della velocità longitudinale del veicolo e si nota che rispetto al caso di singola trazione, a fine simulazione, il veicolo con ripartizione di frenata raggiunge una velocità inferiore e questa velocità è tanto minore quanto minore è il rapporto di ripartizione. Sostanzialmente, anche in condizioni di slittamento posteriore, la ripartizione aumenta l'efficienza di frenata del veicolo. Infine, in figura 4.36 si osserva che anche la dinamica dello sterzo è stabilizzata.

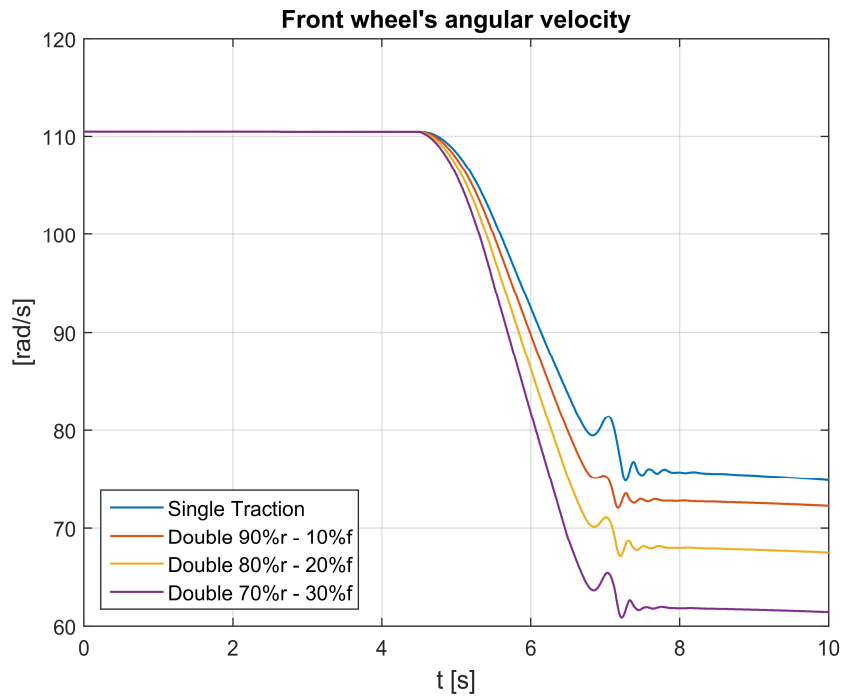


Figura 4.33. Velocità angolari ruota anteriore.

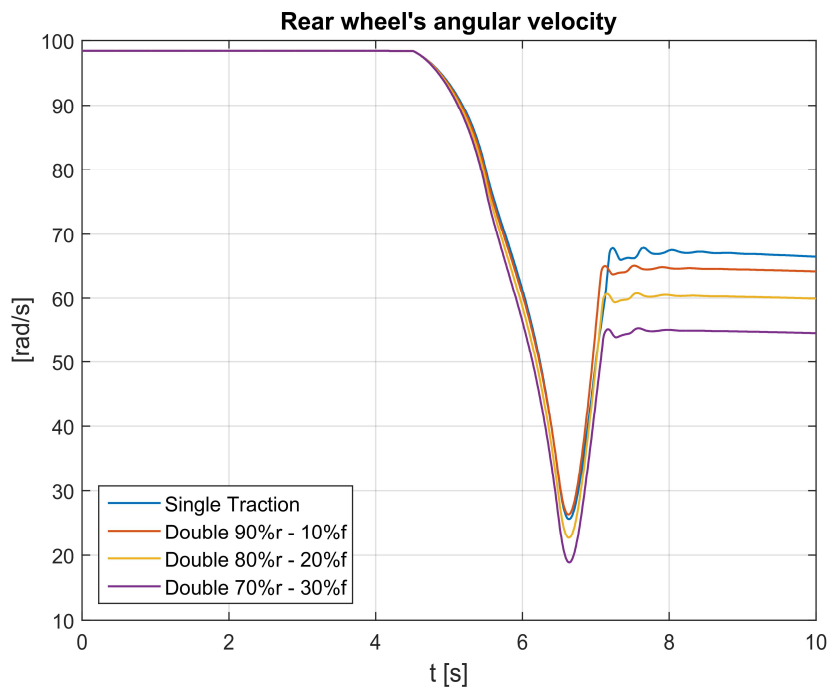


Figura 4.34. Velocità angolari ruota posteriore.

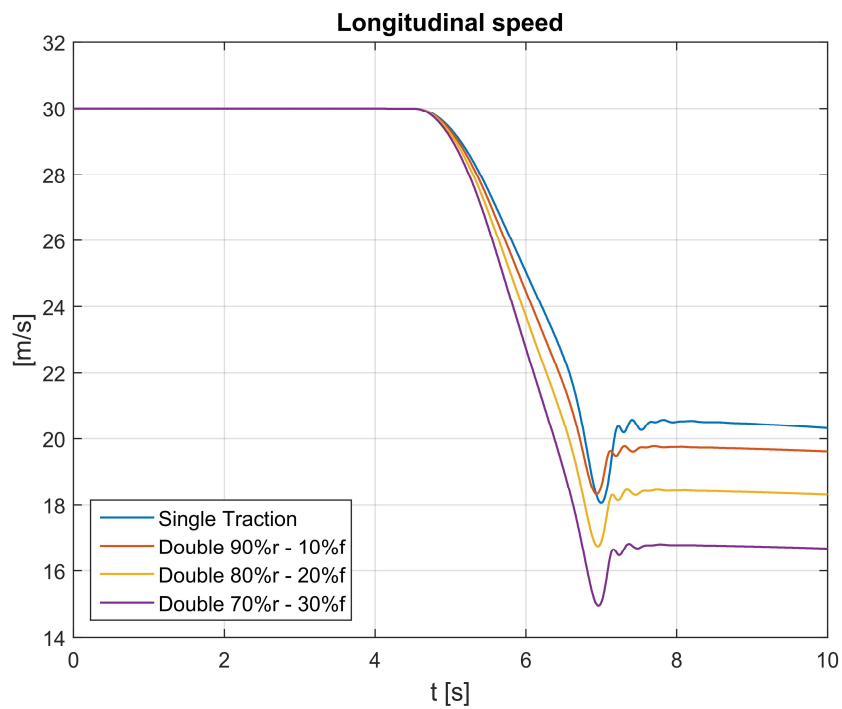


Figura 4.35. Velocità di avanzamento del veicolo.

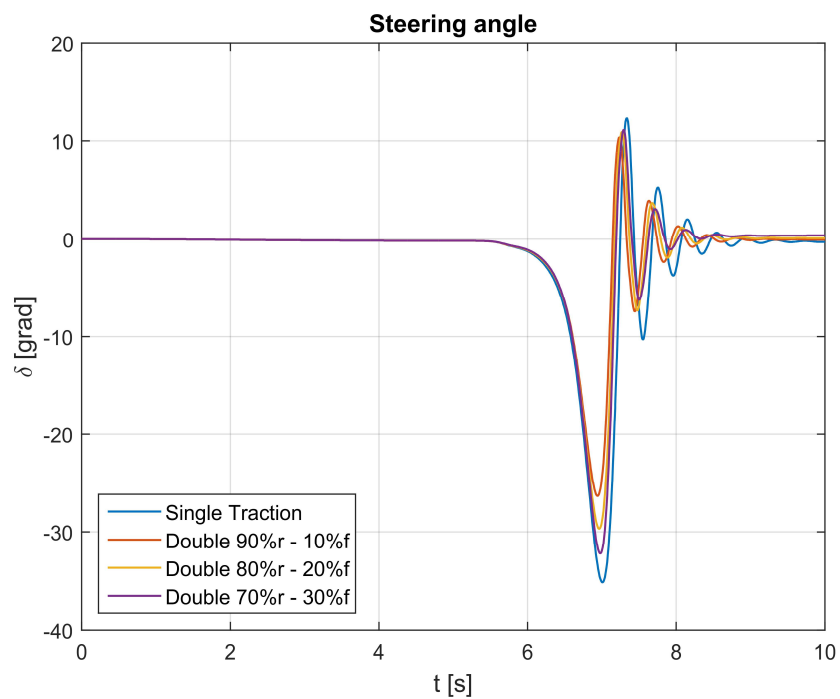


Figura 4.36. Angolo di sterzo.

Conclusioni

Questa tesi ha riassunto i risultati del lavoro svolto durante l'attività di dottorato di ricerca il cui ambito ha riguardato lo studio, l'analisi e la modellazione del comportamento dinamico di un motoveicolo a trazione integrale (due ruote motrici), ponendo particolare attenzione alle tematiche relative alla sicurezza in diverse condizioni di fondo stradale.

Nella prima parte di tale lavoro ci si è concentrati sulla costruzione di un modello della motocicletta che rappresentasse correttamente le dinamiche di wobble, di weave e di capsizes, considerate le più critiche per il moto di un motoveicolo in evoluzione libera e che potesse essere utilizzato quale punto di partenza per la costruzione di un modello a doppia trazione.

Nella seconda parte del lavoro, il modello iniziale è stato ulteriormente migliorato estendone la dinamica, aumentando i suoi gradi libertà e introducendo un adeguato modello dei pneumatici che è stato individuato in quello di Burckhardt, in grado di descrivere le forze tra il pneumatico ed il terreno sia in condizione di aderenza che di slittamento in diverse condizioni di fondo stradale. Il modello così ottenuto è stato inizialmente confrontato con quello di partenza cercando di individuare le differenze e gli effetti possibili sulle dinamiche di wobble, di weave e di capsizes i quali rappresentano i modi di vibrare che possono causare la caduta di un motoveicolo. Il confronto ha evidenziato che il modello con dinamica estesa, ottenuta con l'introduzione della dinamica nella direzione di avanzamento del veicolo è leggermente più stabile alle medie e alle alte velocità. Inoltre con lo stesso modello sono state eseguite una serie di simulazioni per testare le sue prestazioni in condizioni di accelerazione, decelerazione, in curva sia in condizioni di aderenza che di scivolamento e in situazioni dinamiche più complesse quali le tipiche cadute di lowside e highside.

Per analizzare comportamenti e situazioni più complesse e complicate, in cui il motovei-

colo ad esempio percorre una curva con angoli di rollio superiori a $\pm 10^\circ$, o in situazioni di cadute dovute a brusche accelerazioni o frenate (highside e lowside) il modello è stato ulteriormente testato e validato. Infine si è passati a simulare il modello a trazione integrale. Tale modello è stato simulato confrontando il modello a trazione posteriore e quello a doppia trazione in situazione di sterzo libero e suddividendo la trazione alle ruote mettendo in evidenza da parte del modello a doppia trazione una maggiore stabilità in curva.

Richiami di fisica dei corpi rigidi

A.1 Matrici di rotazione

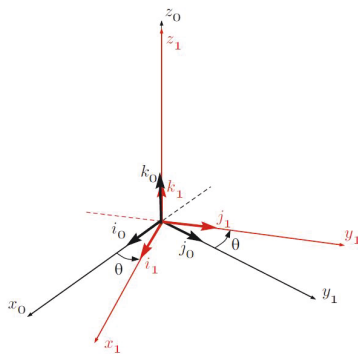


Figura A.1. rotazione intorno all'asse z_0

In seguito si assumerà la notazione che identifica la generica matrice di rotazione R_{α}^{β} come la trasformazione di coordinate di un generico vettore definito nel sistema di riferimento α nelle coordinate del sistema di riferimento β . Si consideri il caso mostrato in figura A.1: il sistema $Ox_1y_1z_1$ è ruotato di θ gradi rispetto a $Ox_0y_0z_0$ attorno all'asse $z_0 \equiv z_1$. Scopo di questo paragrafo è di sintetizzare le regole per scrivere compiutamente la matrice di rotazione R_0^1 che ci permette di esprimere il punto p_1 del sistema $Ox_1y_1z_1$ nel sistema $Ox_0y_0z_0$, ovvero si vogliono ricavare tutti i coefficienti di R_0^1 tali che $p_0 = R_0^1 p_1$. Nella seguente trattazione si utilizza la regola della mano destra per stabilire il segno dell'angolo in base al quale è effettuata la rotazione. Pensando di afferrare con la mano l'asse di

rotazione (il pollice punta nello stesso verso del versore \hat{k}_0) e muovendo le punta delle dita dal sistema di riferimento 0 a 1, la mano tende a chiudersi; in tal caso, cioè nella rotazione espressa da $R_0^1 \theta$ avrà segno positivo. Se la mano, anziché chiudersi su se stessa, si fosse aperta, allora θ avrebbe avuto segno negativo. Definendo R_0^1 la matrice dei coseni direttori nel seguente modo:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} i_0 \cdot i_1 & i_0 \cdot j_1 & i_0 \cdot k_1 \\ j_0 \cdot i_1 & j_0 \cdot j_1 & j_0 \cdot k_1 \\ k_0 \cdot i_1 & k_0 \cdot j_1 & k_0 \cdot k_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

dalla figura A.1 si evince che:

$$\begin{aligned} i_0 \cdot i_1 &= |i_0||i_1| \cos \theta = \cos \theta \\ j_0 \cdot i_1 &= |j_0||i_1| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta \\ j_1 \cdot i_0 &= |j_1||i_0| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta \\ j_1 \cdot j_0 &= |j_1||j_0| \cos \theta = \cos \theta \\ k_0 \cdot k_1 &= |k_0||k_1| = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

mentre i rimanenti prodotti scalari danno contributo uguale a zero a causa dell'ortogonalità dei vettori. In sostanza quello che si ottiene è:

$$R_0^1(z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

che corrisponde alla matrice di rotazione di angolo θ intorno all'asse z effettuata in senso antiorario.

In modo analogo possono essere definite anche le matrici di rotazione intorno ai restanti assi x e y . I risultati che si ottengono sono i seguenti:

$$R_0^1(y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$R_0^1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Alcune importanti proprietà delle matrici di rotazione sono di seguito riassunte; osservando

la (A.3), la (A.4) e la (A.3) si può facilmente dimostrare che:

$$R_1^0 = (R_0^1)^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

Ricordando che il prodotto scalare gode della proprietà commutativa, cioè ad esempio $i_0 \cdot j_0 = j_0 \cdot i_0$, allora:

$$R_1^0 = (R_0^1)^T. \quad (\text{A.7})$$

Quindi sostituendo la (A.6) in (A.7) risulta:

$$R_1^0 = (R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T. \quad (\text{A.8})$$

Una matrice la cui inversa coincide con la trasposta, si dice ortogonale, pertanto le matrici di rotazioni sono matrici ortogonali.

Esempio

Siano P_0 e P_1 due vettori espressi rispettivamente nel sistema di riferimento Σ_0 e Σ_1 , la relazione:

$$P_0 = R_0^1 P_1 \quad (\text{A.9})$$

ci dice che dato il vettore P_1 espresso nel sistema di riferimento Σ_1 , tramite la matrice di trasformazione R_0^1 è possibile calcolare le componenti del medesimo vettore, ma espresso nel sistema di riferimento Σ_0 . In maniera analoga:

$$P_1 = R_1^0 P_0 = (R_0^1)^{-1} P_0 = (R_0^1)^T P_0 = R_1^0 P_0 \quad (\text{A.10})$$

esprime il vettore P_0 nel sistema di riferimento Σ_1 .

A.2 Caratteristiche di un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso

Consideriamo la figura A.2 ed in particolare la generica particella m_i del corpo rigido a distanza r_i da un punto di riferimento O , posto sull'asse di rotazione. Detta ω la velocità angolare di rotazione del corpo rigido, è possibile definire il **momento angolare** l_i della particella m_i la quantità:

$$l_i = r_i \times m_i v_i, \quad (\text{A.11})$$

dove $m_i v_i$ è la **quantità di moto** della generica particella m_i . Come si fa spesso considerando il corpo rigido come composto da tanti piccoli elementi di massa m_i , per $i = 1, \dots, N$, il

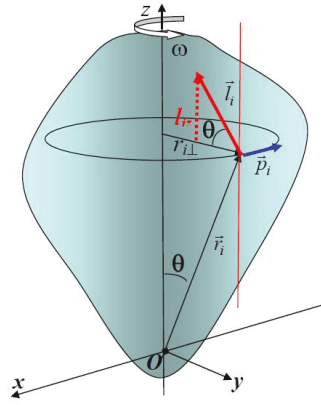


Figura A.2. Momento angolare di una particella di un corpo rigido.

momento angolare sarà:

$$L = \sum_i l_i = \sum_i r_i \times m_i v_i \quad (\text{A.12})$$

ove le v_i sono le velocità con cui i singoli elementi del corpo si muovono su circonferenze a causa della velocità angolare ω di esso, poiché r_i è un vettore fisso rispetto al corpo, la velocità v_i è dovuta solamente al moto di rotazione del corpo rigido:

$$v_i = \omega \times r_i, \quad (\text{A.13})$$

di conseguenza, la (A.12) diventa:

$$L = \sum_i r_i \times m_i \omega \times r_i = \sum_i m_i (r_i \times (\omega \times r_i)), \quad (\text{A.14})$$

ossia, sviluppando il triplo prodotto vettoriale:

$$L = \sum_i m_i (\omega r_i^2 - r_i (r_i \omega)). \quad (\text{A.15})$$

La componente x della (A.15) diventa:

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i, \quad (\text{A.16})$$

ed espressioni analoghe per le altre componenti di L . Si vede così che ogni componente del momento angolare è una funzione lineare delle componenti della velocità angolare. Il vettore momento angolare è legato alla velocità angolare da una trasformazione lineare, cioè

è possibile scrivere:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

e che in forma compatta diventa:

$$L = I\omega, \quad (\text{A.19})$$

dove la matrice I prende il nome di **tensore d'inerzia** . I nove coefficienti I_{xx} , I_{xy} , ecc. sono i nove elementi della matrice di trasformazione I . Gli elementi diagonali prendono il nome di *coefficienti d'inerzia* e hanno forma del tipo:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2), \quad (\text{A.20})$$

mentre gli elementi non disgonali,

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad (\text{A.21})$$

prendono il nome di *prodotti d'inerzia*, in cui la notazione degli indici è la seguente: I_{xy} indica la componente x di L quando ω è parallela a y e così per tutti gli altri.

Gli elementi di matrice (A.20) e (A.21) si riferiscono al caso in cui il corpo rigido sia composto da un numero discreto di particelle. Nel caso di corpi continui, la somma dovrà essere sostituita da un integrale di volume, dove al posto delle masse delle particelle comparirà la funzione densità. In questo caso, l'elemento diagonale I_{xx} sarà dato da:

$$I_{xx} = \int_V \rho(r)(r^2 - x^2)dV. \quad (\text{A.22})$$

A.2.1 Il tensore d'inerzia

Una delle caratteristiche più importanti del tensore d'inerzia I è che la matrice ad esso associata è simmetrica, cioè $I_{ij} = I_{ji}$. Si usa anche dire che la matrice I è invariante per riflessione dei suoi elementi rispetto alla *diagonale principale* (la diagonale che va dall'elemento in basso a destra all'elemento in alto a sinistra). Ciascun elemento che si trova sopra la diagonale, per esempio I_{xy} , è uguale all'elemento simmetrico rispetto alla diagonale

I_{yx} . Tale proprietà può essere enunciata in modo differente ricordando che la trasposta di una matrice A è definita come quella matrice ottenuta per riflessione degli elementi di A rispetto alla diagonale principale, in altri termini, l'elemento a_{ij} di A^T è uguale all'elemento a_{ji} di A . Con questa notazione la relazione $I_{ij} = I_{ji}$ implica che la matrice I è uguale alla sua trasposta I^T .

A.2.2 Asse principale d'inerzia

Come si nota chiaramente dalla figura A.2, il momento angolare di un corpo rigido che ruota attorno ad un punto O non ha la stessa direzione dell'asse di rotazione. In altri termini L non è parallelo ad ω . Questo significa che *possono esistere* degli assi di rotazione rispetto ai quali il momento angolare L è parallelo ad ω . Quando questo si verifica diciamo che l'asse è un **asse principale d'inerzia**. Due vettori non nulli a e b sono paralleli se e solo se esiste un numero reale λ per il quale $a = \lambda b$; allora la definizione di asse principale d'inerzia può essere data nel modo seguente: una retta solidale ad un corpo rigido e passante per un suo punto O è un *asse principale d'inerzia* se e solo se esiste un numero reale λ per il quale ad una velocità angolare ω parallela all'asse corrisponde il momento angolare:

$$L = \lambda \omega. \quad (\text{A.23})$$

Per capire il significato di λ scegliamo ω parallelo a z , in questo caso $L = (0, 0, I_{zz}\omega) = I_{zz}\omega$. Confrontando questa espressione con la (A.23) si vede subito che il numero λ nella (A.23) è proprio il momento relativo all'asse di rotazione. Quindi possiamo dire che se il tensore d'inerzia I rispetto ad un certo sistema di assi coordinati è diagonale:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

allora gli assi x , y e z sono assi principali d'inerzia. Viceversa, se x , y e z sono assi principali, allora si deduce facilmente che la matrice I è diagonale. I tre numeri reali λ_1 , λ_2 e λ_3 coincidono con i momenti d'inerzia relativi agli assi principali e si dicono **momenti principali d'inerzia**.

Formulazione Lagrangiana

In molti problemi fisici è necessario usare sistemi di coordinate non cartesiane. In linea di massima possiamo suddividere questi problemi in due categorie fondamentali. La prima è costituita dai problemi in cui certe proprietà di simmetria rendono un certo sistema di coordinate particolarmente vantaggioso: per esempio i problemi con simmetria sferica suggeriscono l'uso di coordinate sferiche; analogamente i problemi con simmetria assiale sono particolarmente semplici se trattati con un sistema di coordinate cilindriche. Nella seconda categoria vi sono quei sistemi materiali nei quali le particelle sono soggette a *vincoli* che rendono preferibile l'uso di particolari sistemi di coordinate non necessariamente cartesiane. Un esempio di questo tipo è lo studio del moto di un carrello che scivola su una rotaia curva, è più semplice se si usa come coordinata curvilinea la distanza percorsa lungo la curva a partire da un punto scelto come origine.

Per queste ragioni l'uso della seconda legge di Newton in sistemi non cartesiani è un problema decisamente complesso. Da queste considerazioni nasce l'esigenza di trovare un'equazione del moto alternativa alla seconda legge di Newton, ma ad essa equivalente, che sia ugualmente semplice in ogni sistema di coordinate. Questa alternativa è costituita dalle *equazioni di Lagrange*.

Il modo migliore per comprendere la grande versatilità delle equazioni di Lagrange è quello di passare attraverso un *principio variazionale*. Il calcolo delle variazioni ha per oggetto la ricerca dei minimi e dei massimi esprimibili nella forma di un integrale. Ad esempio i principi fisici come il principio di Fermat sono noti come principi variazionali.

B.1 Equazione di Eulero-Lagrange

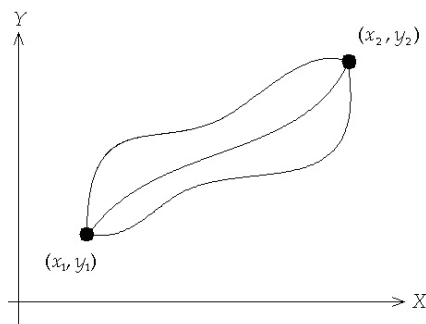


Figura B.1. Due cammini differenti.

Dati due punti x_1 e x_2 in un piano, qual è il cammino più breve che li unisce? Ovviamente conosciamo la risposta: un segmento di retta. Nella maniera del tutto generale, da un punto di vista variazionale, possiamo scrivere:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx \quad (\text{B.1})$$

in cui $y(x)$ è una funzione incognita il cui grafico congiunge i due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . E' possibile dimostrare che l'equazione (B.1), calcolata lungo un cammino individuato dalla funzione $y = y(x)$ è stazionaria rispetto a piccole variazioni del cammino se e solo se la funzione $y(x)$ verifica:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad (\text{B.2})$$

per ogni x nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$. La (B.2) prende il nome di *equazione di Eulero-Lagrange*, dal nome del matematico svizzero Leonhard Euler, 1707-1783, e dal fisico e matematico italiano Joseph-Louis Lagrange (nato come Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736-1813) che consente di ricavare il cammino lungo il quale l'integrale S è stazionario.

B.1.1 Equazioni di Lagrange

Avendo a disposizione i metodi del calcolo delle variazioni, possiamo introdurre la formulazione lagrangiana. Questa formulazione presenta due importanti vantaggi nei confronti della precedente formulazione newtoniana. Il primo di questi è certamente il fatto che le equazioni di Lagrange, diversamente da quelle di Newton, mantengono la stessa forma in ogni sistema di coordinate. Il secondo consiste nello studio dei *sistemi vincolati*, come per esempio una ruota che scorre su una guida metallica, l'approccio lagrangiano permette di eliminare le forze vincolari (la reazione normale della guida che vincola la ruota a rimanere su di essa). In questo modo si semplifica notevolmente la maggior parte dei problemi in

quanto le forze vincolari sono generalmente incognite e non sempre ci interessa conoscerne il valore.

B.2 Vincoli e coordinate generalizzate

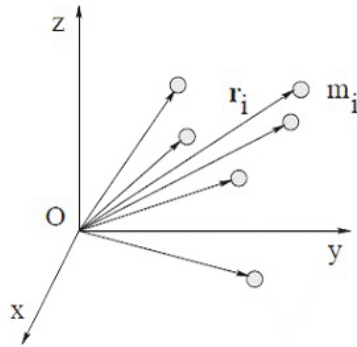


Figura B.2. sistema di N particelle

Per comprendere meglio quanto fin qui detto relativamente ai due vantaggi della formulazione lagrangiana, consideriamo un sistema di riferimento inerziale, in cui sono presenti N particelle puntiformi. La posizione di una particella puntiforme è, ad ogni istante, individuata dal vettore $r(t)$. La particella è libera se non è soggetta ad alcuna condizione che ne limiti la traiettoria; in caso contrario si dice che essa è vincolata. Allo stesso modo per un sistema di N particelle, se tutte le particelle che costituiscono il sistema sono libere, il sistema è detto libero altrimenti si dice che è vincolato. La presenza di vincoli comporta l'introduzione di forze che agiscono sulle particelle limitandone la mobilità. Queste forze sono dette *forze vincolari* o *reazioni vincolari*.

B.2.1 Classificazione dei vincoli

Classifichiamo i vincoli in base alla forma delle relazioni che legano le coordinate delle particelle:

- **vincoli olònomi:** possono essere espressi da relazioni del tipo:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_N, t) = 0. \quad (\text{B.3})$$

- **vincoli anolònomi:** non possono essere espressi da relazioni del tipo (B.3). Tali vincoli possono essere espressi da vincoli di diseuguaglianza o equivalentemente da vincoli di uguaglianza in cui compaiono anche le velocità.

In base alla dipendenza dal tempo possiamo classificare i vincoli in:

- **vincoli scleronomi**: non dipendono dal tempo;
- **vincoli reonomi**: dipendono dal tempo.

In base al tipo di reazione vincolare:

- **vincoli lisci**: la reazione vincolare è sempre normale al vincolo. Per esempio, se il vincolo olonomo è una superficie di equazione $f(r,t)$, la reazione vincolare ϕ sarà parallela al gradiente di f ;
- **vincoli scabri**: la reazione vincolare ha una componente tangenziale al vincolo, cioè sono presenti forze di attrito.

B.2.2 Gradi di libertà e coordinate generalizzate

I vincoli introducono due tipi di difficoltà nella soluzione dei problemi meccanici. La prima è che le coordinate cartesiane r_i non sono più tutte indipendenti, essendo fra loro legate dalle equazioni del vincolo; la seconda è che le forze esercitate dal vincolo non sono note a priori. Esse fanno parte delle incognite del problema e la loro determinazione va ricercata dalla soluzione del problema stesso [8].

Nel caso di vincoli olonomi, si può superare la prima difficoltà introducendo le *coordinate generalizzate*. La configurazione del sistema libero formato dalle N particelle è definita dagli N vettori posizione $r_i(t)$, con $i = 1, \dots, N$, ed è quindi individuata, in uno spazio tridimensionale, da $3N$ quantità scalari o coordinate indipendenti. Definiamo *numero di gradi di libertà* del sistema il minimo numero di coordinate indipendenti in grado di individuare la configurazione. Secondo questa definizione il sistema libero di N particelle in uno spazio tridimensionale ha $3N$ gradi di libertà. In un sistema vincolato le coordinate non sono tra loro indipendenti. Se i vincoli sono olonomi e sono espressi mediante k equazioni del tipo (B.3) allora il numero di coordinate indipendenti sarà:

$$n = 3N - k. \quad (\text{B.4})$$

Possiamo pertanto introdurre n coordinate indipendenti che tengano conto dei vincoli. Siano q_1, q_2, \dots, q_n tali coordinate, possiamo scrivere:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (\text{B.5})$$

Le coordinate q_i , con $i = 1, \dots, n$, sono dette *coordinate generalizzate* del sistema. Esse in generale non hanno le dimensioni di una lunghezza, ma possono essere grandezze qualsiasi, ad esempio un angolo, un momento e per questo vengono dette *coordinate generalizzate* del

sistema. Spesso è utile interpretare le coordinate generalizzate come un singolo punto in uno spazio a n dimensioni detto *spazio delle configurazioni*, in cui ogni punto rappresenta una configurazione del sistema.

B.3 Principio dei lavori virtuali

Definiamo spostamento virtuale infinitesimo di un sistema un cambiamento di configurazione relativo ad una variazione δr_i delle coordinate, compatibile con le forze ed i vincoli a cui il sistema è sottoposto a un dato istante t . Chiamiamo tale spostamento virtuale per distinguerlo da uno spostamento reale dr_i in cui si considera un intervallo dt nel quale variano forze e vincoli. Consideriamo un sistema di N particelle. Supponiamo che il sistema sia in equilibrio, cioè che ogni particella del sistema è in equilibrio. Allora:

$$F_i = 0 \Rightarrow F_i \cdot \delta r_i = 0 \Rightarrow \delta L = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (\text{B.6})$$

con $i = 1, \dots, N$ e δL è il lavoro virtuale infinitesimo. Siano q_1, q_2, \dots, q_n le coordinate generalizzate del sistema scelte, allora:

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ \delta r_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

con $i = 1, \dots, N$. Allora la (B.6) diventa:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \quad (\text{B.8})$$

dove:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \quad (\text{B.9})$$

sono dette *forze generalizzate*.

B.4 Procedimento generale

Per tutti i problemi di meccanica, ai quali sia applicabile il metodo lagrangiano, si può formulare un procedimento generale. Si considera un sistema meccanico con N gradi di libertà, descritto dalle coordinate generalizzate $\{q_k\}_{k=1, \dots, N}$. Per brevità, faremo riferimento all'insieme delle coordinate generalizzate attraverso il vettore colonna $q = [q_1, \dots, q_N]^T$. Le equazioni che governano il moto del sistema si ottengono sostituendo,

T , V e Q all'equazione (B.2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q_q, \quad (\text{B.10})$$

dove T è l'energia cinetica del sistema, V è l'energia potenziale del sistema, q è il vettore delle coordinate generalizzate, \dot{q} è la derivata di q rispetto a t , cioè il vettore delle velocità generalizzate e Q_q è il vettore delle forze generalizzate. La (B.10) è composta da N equazioni scalari del secondo ordine in q . Tali equazioni sono dette equazioni di Lagrange del secondo tipo.

Bibliografia

- [1] Emmanuel Carvallo. «Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette». In: *Journal de L'Ecole Polytechnique* 5 (1900), pp. 119–188 (cit. a p. 20).
- [2] V. Cossalter. *Motorcycle Dynamics*. Lightning Source Incorporated, 2006 (cit. alle pp. 23, 39–41, 55).
- [3] Vittore Cossalter e Roberto Lot. «A motorcycle multi-body model for real time simulations based on the natural coordinates approach». In: *Vehicle System Dynamics* 37.6 (2002), pp. 423–447 (cit. a p. 22).
- [4] J.C. Dixon. *Tires, suspension, and handling*. Society of Automotive Engineers, 1996 (cit. a p. 53).
- [5] Mahbub Rahman Gani. «The computer assisted modelling, simulation and analysis of two-wheeled road vehicles». Tesi di dott. Imperial College of Science, Technology e Medicine, 1999 (cit. a p. 22).
- [6] N. Getz. «Control of balance for a nonlinear nonholonomic non-minimum phase model of a bicycle». In: *American Control Conference*. Vol. 1. Giu. 1994, pp. 148–151 (cit. a p. 19).
- [7] N. H. Getz e J. E. Marsden. «Control for an autonomous bicycle». In: *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 2. Mag. 1995, pp. 1397–1402 (cit. a p. 19).
- [8] Herbert Goldstein. *Meccanica Classica*. Bologna: Zanichelli, 1971 (cit. a p. 104).
- [9] Uwe Kiencke e Lars Nielsen. *Automotive Control Systems: for Engine, Driveline and Vehicle*. Springer-Verlag, 2000 (cit. alle pp. 53, 54).
- [10] Felix Klein e Arnold Sommerfeld. «Über die Theorie des Kreisels». In: *Teubner* (1910), pp. 863–884 (cit. a p. 20).
- [11] C. Koenen. «The dynamic behaviour of a motorcycle when running straight ahead and when cornering». Tesi di dott. Delft University of Technology, 1983 (cit. a p. 21).

- [12] James P. Lynch e R. Douglas Roland. «Computer animation of a bicycle simulation». In: *Fall Joint Computer Conference*. 1972 (cit. a p. 21).
- [13] J.I. Neimark e N.A. Fufaev. *Dynamics of Nonholonomic Systems*. Translations of mathematical monographs. Amer. Mathem. Society, 1972 (cit. a p. 21).
- [14] J.I. Neimark e N.A. Fufaev. «The stability of noncontrolled and controlled bicycles and motorcycle». In: *Journal Mechanics Solids* 2 (1967), pp. 7–14 (cit. a p. 21).
- [15] P. K. Nguyen e E. R. Case. «The friction models and their effect on simulated vehicle dynamics». In: *Proceedings of a Symposium on Commercial Vehicle Braking and Handling*. 1975, pp. 245–312.
- [16] *Global status report on road safety*. 2015. URL: www.who.int/violence_injury_prevention/road_safety_status/2015/en/ (cit. a p. 15).
- [17] William John Macquorn Rankine. «Dynamical principles of the motion of velocipedes». In: *The Engineer* (1869), pp. 2, 79, 129, 153, 175 (cit. a p. 19).
- [18] A. Sharp. *Bicycles & Tricycles: A Classic Treatise on Their Design and Construction*. Dover Transportation. Dover Publications, 2013 (cit. a p. 20).
- [19] R. S. Sharp. «The influence of frame flexibility on the lateral stability of motorcycles». In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 15.2 (1980), pp. 117–120 (cit. a p. 21).
- [20] R. S. Sharp e C. J. Alstead. «The influence of structural flexibilities on the straight-running stability of motorcycles». In: *Vehicle System Dynamics* 9.6 (dic. 1980), pp. 327–357 (cit. a p. 21).
- [21] P. T. J. Spierings. «The Effects of Lateral Front Fork Flexibility on the Vibrational Modes of Straight-Running Single-Track Vehicles». In: *Vehicle System Dynamics* 10.1 (1981), pp. 21–35 (cit. a p. 21).
- [22] S. timoshenko e D. H. Young. *Advanced Dynamics*. New York: McGraw Hill, 1948 (cit. a p. 19).
- [23] Francis John Welsh Whipple. «The stability of the motion of a bicycle». In: *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 30 (1899), pp. 312–321 (cit. a p. 20).
- [24] R. A Wilson-Jones. «Steering and Stability of Single-Track Vehicles». In: *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*. Part 4. 1951, pp. 191–199 (cit. a p. 21).